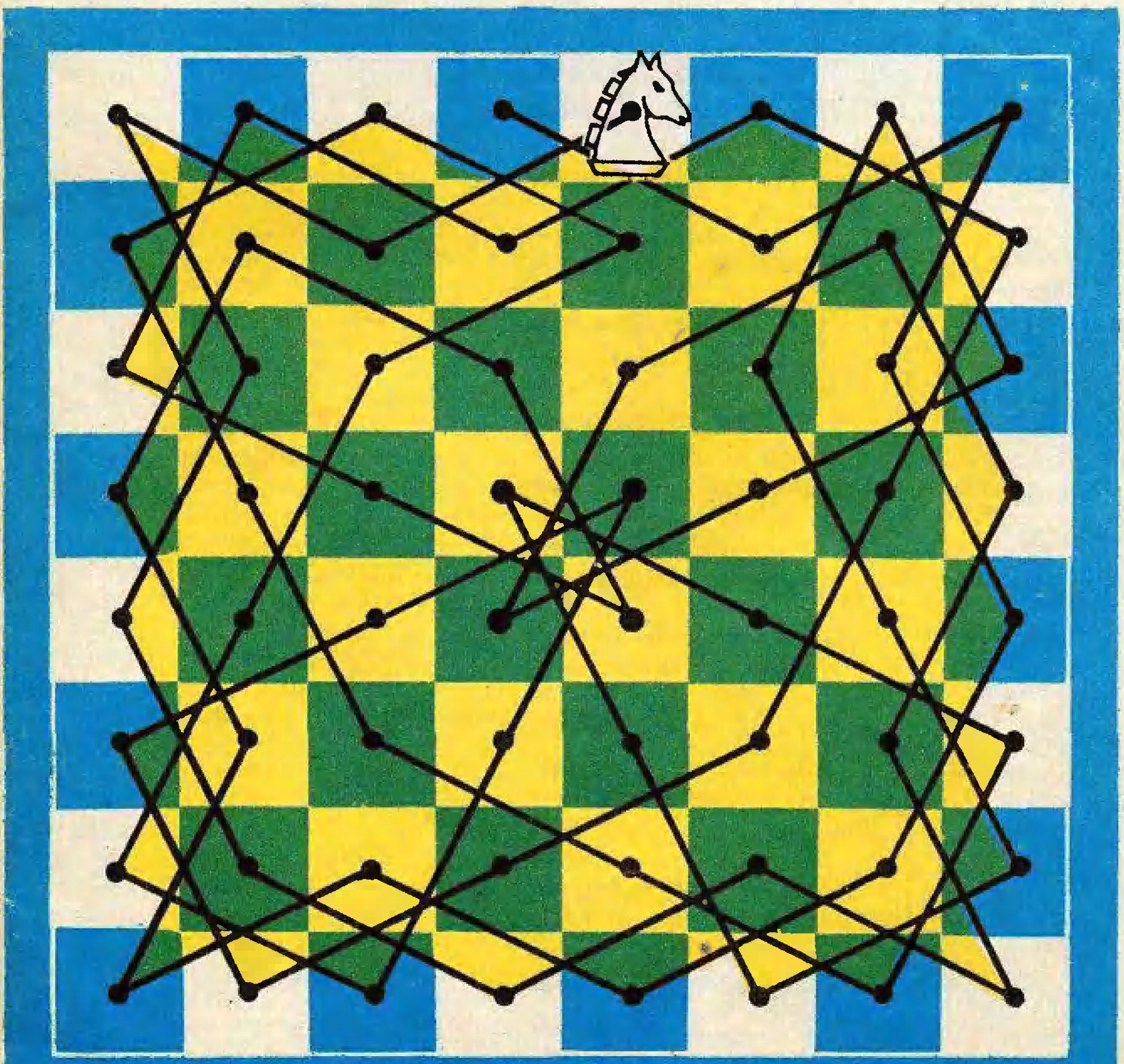
Научно-популярный физико-математический

Квант

9

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

Вычислительные машины и системы счисления

Р. С. Гутер

Маленькую логарифмическую линейку можно положить в карман. Маленькая электронная вычислительная машина (например, «Проминь») имеет размеры письменного стола, а большая поместится не в каждой комнате. Еще больше различие в скоростях: настольная клавишная машина ВММ-2 выполняет около двухсот пятидесяти действий в час, машина БЭСМ-6 — около миллиона действий в секунду. Но при классификации вычислительных машин за основу принимаются не размеры и не скорость, а *принцип действия*. По принципу действия вычислительные машины делятся на *машины непрерывного действия* (иначе — *моделирующие*, или *аналоговые*) и *цифровые* (*дискретные*) *машины*.

Простейшую вычислительную машину непрерывного действия легко самостоятельно собрать в школьной физической лаборатории. Для этого достаточно взять любой источник постоянного тока и замкнуть его на сопротивление. Включив в цепь амперметр и вольтметр, как показано на рисунке 1, мы получим машину для умножения и деления.

Действительно, ток в такой цепи подчиняется известному закону Ома: $I=\frac{U}{R}$. Зная напряжение U и сопротивление R, мы можем по показаниям амперметра находить частное I от деления U на R. Зная ток и сопротивление, по показаниям вольтметра можно получать произведение $U=IR$.

Этот элементарный пример хорошо разъясняет странное, на первый взгляд, утверждение: вычислительные машины непрерывного действия на самом деле н е в ы п о л н я ю т н и к а к и х в ы ч и с л е н и й. Они лишь воспроизводят (моделируют) процесс, который описывается данной функцией, уравнением или системой.

Числа представляются здесь физическими величинами, которые могут изменяться непрерывно. Это могут быть ток или напряжение в электрической цепи, температура, давление, длина отрезка, угол поворота вала и т. п. Точность такой машины определяется точностью

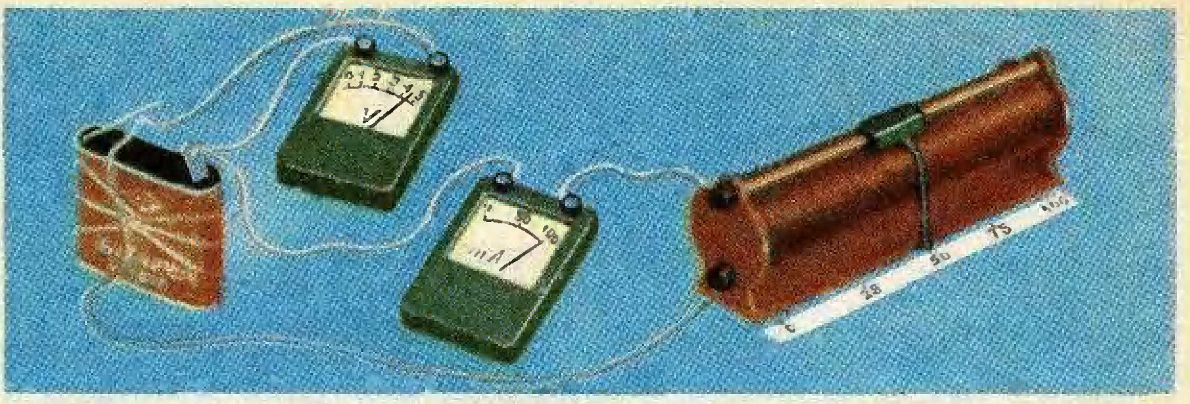


Рис. 1.

физических приборов, измеряющих соответствующие величины.

Совсем иначе представляется число в цифровой машине. Тут оно записывается в своей обычной числовой форме и, следовательно, требует использования некоторой определенной *системы счисления*.

Для изображения каждого разряда числа в цифровой машине отводится специальный элемент, имеющий определенное число различных устойчивых состояний. Например, в обычных русских счетах (которые являются более близкими родственниками современных вычислительных машин, чем логарифмическая линейка) для изображения цифры каждого разряда отводится спица с надетыми на нее десятью косточками. Точность записи числа на счетах определяется количеством разрядов числа, а значит — количеством имеющихся на раме спиц.

К цифровым машинам относятся также арифмометры и клавишные вычислительные машины. В них для изображения каждого разряда числа используется шестеренка с переменным числом зубцов, которая может находиться в одном из десяти различных устойчивых состояний, в зависимости от угла поворота шестерни на валу, или ступенчатый валик, также с десятью возможными состояниями.

Во всех упомянутых случаях речь идет о д е с я т и состояниях каждого элемента. Легко сообразить, что это связано с десятичной системой счисления: в каждой позиционной системе счисления *количество различных знаков* (цифр), *требующихся для изображения числа, равно основанию системы*. Мы видим здесь, что система счисления предъявляет свои требования к конструкции вычислительной машины. Удовлетворить этим требованиям нетрудно: на спицу счет можно надеть любое количество косточек или на шестерне нарезать любое нужное количество зубцов.

Но бывает и так, что машина предъявляет свои требования к системе счисления. Скажем, для электрических, релейных и электронных элементов характерным является наличие д в у х устойчивых состояний. Например, электромеханическое реле может быть замкнуто или разомкнуто (как и обычный выключатель), конденсатор — заряжен или разряжен, электронная лампа — проводит или не проводит ток (открыта или заперта), ферритный сердечник намагничен в одном или противоположном направлении и т. п. Использование таких элементов требует обращения к системе счисления, в которой достаточно д в у х цифр. Такова *двоичная система счисления*: позиционная система с основанием *два*.

В такой системе единица каждого следующего разряда вдвое больше единицы предыдущего. Поэтому число «два» изображается как 10, число «четыре», как 100, а «восемь» — как 1000.

Вот как выглядят некоторые числа в двоичной системе:

Десятичные числа	Двоичные числа	Десятичные числа	Двоичные числа
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1 000
4	100	50	110 010
5	101	100	1 100 100

Преимущества двоичной системы для вычислительных машин не исчерпываются тем, что она позволяет непосредственно использовать элементы с двумя устойчивыми состояниями. Для построения вычислительной машины имеет значение суммарное число различных устойчивых состояний всех элементов. И в этом отношении двоичная система счисления оказывается более выгодной, чем десятичная. Действительно, для записи, например, целых чисел в интервале $1 \leqslant N \leqslant 999$ в десятичной системе достаточно трех элементов (по одному для каждого разряда), с десятью состояниями каждый. Всего мы получим 30 возможных состояний. В двоичной системе потребуется десять элементов, так как $2^9 = 512 < 999$, а $2^{10} = 1024 > 999$, но зато всего лишь по два состояния, то есть всего 20 возможных состояний.

Еще одно достоинство двоичной системы связано с особенностями арифметических действий. Во всех позиционных системах счисления арифметические действия над многозначными числами сводятся к действиям над однозначными, поэтому для их выполнения достаточно знать таблицы сложения и умножения однозначных чисел. В двоичной системе такие таблицы предельно просты:

$$0+0=0 \qquad 0 \times 0 = 0$$
$$0+1=1+0=1 \qquad 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$$
$$1+1=10 \qquad 1 \times 1 = 1$$

Так как здесь нет иных цифр, кроме нуля и единицы, то умножение многозначных чисел сводится лишь к сдвигу чисел и сложению. Таким образом, основой арифметического устройства вычислительной машины, работающей в двоичной системе счисления, является *многоразрядный двоичный сумматор*, осуществляющий сложение двух многозначных двоичных чисел. С его же помощью выполняются и все остальные арифметические операции. В свою очередь, многоразрядный сумматор может быть составлен из одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых предназначен для сложения элементов одного разряда.

Такой одноразрядный двоичный сумматор должен иметь три входа: на два из них поступают значения соответствующих разрядов двух слагаемых, а третьим является возможный перенос в данный разряд из младшего. Выходов у этого сумматора должно быть два: один из них — сумма, которая должна получиться в данном разряде, а второй — возможный перенос из данного разряда в старший. Двоичный одноразрядный сумматор изображают на схемах так, как показано на рисунке 2. Многоразрядный двоичный сумматор легко составить из нужного количества одноразрядных (рис. 3).

Каждая цифра, подаваемая на любой вход одноразрядного двоичного сумматора, может быть либо нулем, либо единицей. Так как всех входов три, то всего возможно восемь (2^3) различных комбинаций. Для любой такой комбинации сумматор должен

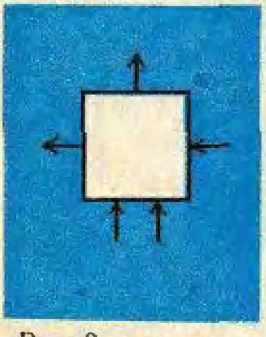


Рис. 2.

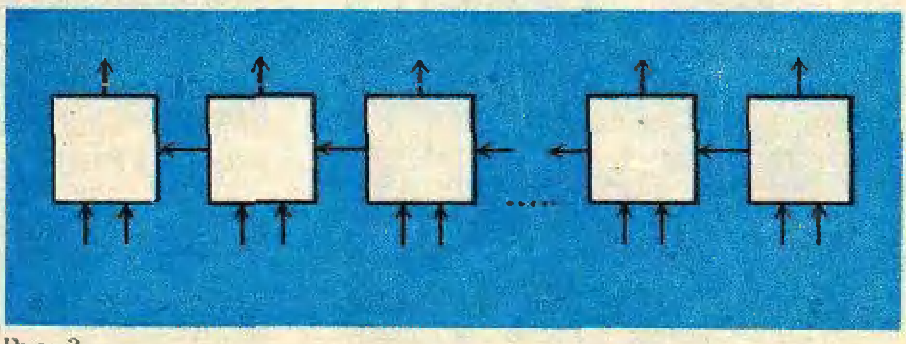


Рис. 3.

давать определенные цифры на выходе. При этом все входы равноправны и значения выходов определяются не тем, что подается на тот или иной вход, а общим количеством единиц, подающихся на входы.

Например, если на вход подаются две единицы и один нуль, то на выходе сумматор должен дать нуль в качестве цифры суммы в данном разряде и единицу переноса в старший разряд ($1+1+0=10$), независимо от того, будет ли нуль на входе переносом из младшего разряда или цифрой одного из слагаемых. Поэтому работу двоичного одноразрядного сумматора можно описать приведенной ниже таблицей. В ней A и B означают входы, на которые подаются цифры соответствующего разряда первого и второго слагаемых, C — выход, содержащий цифру данного разряда в сумме, а Z_1 и Z_2 — переносы соответственно из младшего разряда в данный (вход) и из данного разряда в старший (выход). Проверьте самостоятельно правильность приведенных результатов.

Таблица работы одноразрядного двоичного сумматора

Входы			Выходы	
A	B	Z_1	C	Z_2
0	0	0	0	0
1	0	0		
0	1	0	1	0
0	0	1		
1	1	0		
1	0	1	0	1
0	1	1		
1	1	1	1	1

Прежде, чем рассматривать схемы, дающие возможность осуществить работу сумматора в соответствии с приведенной таблицей, познакомимся с так называемыми *логическими* операциями*), определенными на множестве из двух элементов: 0 и 1.

1. Операция «или» (ее называют также *логическим сложением*). Результат этой операции равен единице, если единице равно хотя бы одно слагаемое. Обозначая эту операцию знаком $\vee$, получим таблицу:

$$0\vee 0=0,\quad 0\vee 1=1\vee 0=1,\quad 1\vee 1=1.$$

2. Операция «и» (иначе — *логическое умножение*). Ее результат есть единица, если оба сомножителя — единицы. Эту операцию обозначают $\wedge$:

$$0\wedge 0=0,\quad 0\wedge 1=1\wedge 0=0,\quad 1\wedge 1=1.$$

3. Операция отрицания обозначается знаком $\neg$. Она переводит единицу в нуль и наоборот:

$$\neg 0=1,\quad \neg 1=0.$$

*) См., например, «Квант» № 4, 1971, стр. 14.

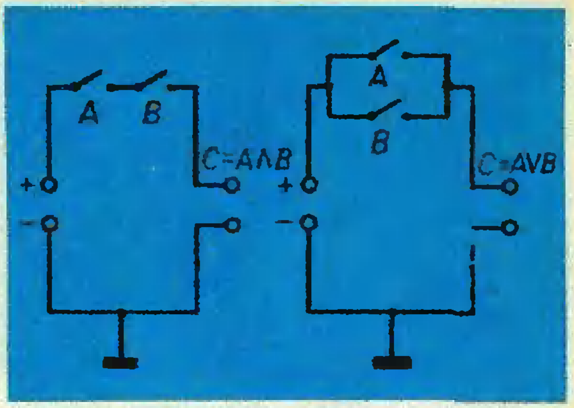


Рис. 4.

Для реализации операций $C=A\vee B$ и $C=A\wedge B$ легко построить простые *контактные схемы* (рис. 4). Здесь значение 1 для A и B выражается замкнутым контактом, а 0 — разомкнутым. Для C значению 1 соответствует наличие напряжения в указанном месте схемы, а 0 — отсутствие напряжения. Ясно, что для операции «и» ток через точку C пойдет тогда и только тогда, когда замкнуты о б а контакта, а для операции «или» — когда замкнут х о т я б ы о д и н.

Употребительны схемы и других типов. Например, для логического сложения и умножения легко составить диодные схемы, в которых значение 1 характеризуется наличием в соответствующей точке высокого потенциала относительно земли, а значение 0 — отсутствием потенциала.

На рисунке 5 показана диодная *схема совпадения*, осуществляющая операцию «и», на рисунке 6 — *собирающая схема*, осуществляющая операцию «или». В них используются полупроводниковые диоды, проводящие ток лишь в одном направлении, показываемом направлением сторон треугольника. Вместо них можно было бы использовать электронную лампу — диод с двумя электродами, которая пропускает ток лишь от анода к катоду.

Если приложить высокий положительный потенциал в точках A и B схемы совпадения (рис. 5), то оба диода окажутся запертыми и в точке C мы получим высокий потенциал $+E$ относительно земли. Это соответствует

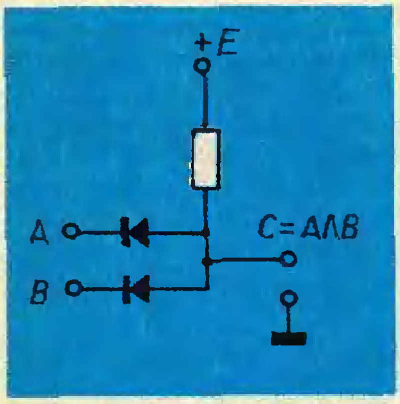


Рис. 5.

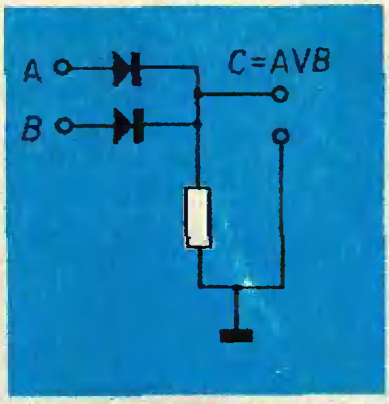


Рис. 6.

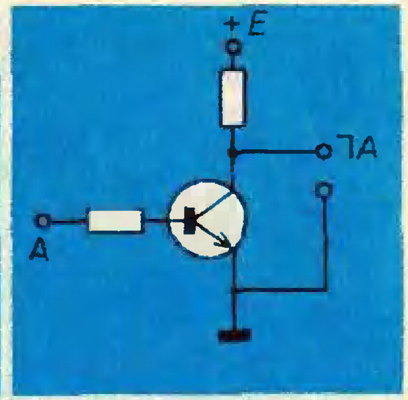


Рис. 7.

равенствам $A=B=1$ и $C=1$. Если же хотя бы в одной из точек A или B высокий потенциал отсутствует, то есть $A=0$ или $B=0$, то соответствующий диод будет открыт, ток пройдет через него и потенциала в точке C не будет, то есть мы получим $C=0$.

Аналогично работает и собирающая схема (рис. 6). Если хотя бы в одной из точек A или B приложен высокий потенциал, то он же будет и в точке C, то есть получится $C=1$. Отсутствие потенциала в точке C, то есть значение $C=0$ получится только в том случае, когда $A=B=0$.

Схему для операции отрицания (*инвертор*) оказывается нельзя собрать из одних диодов — здесь необходим *триод*: электронная лампа с тремя электродами, имеющая, кроме анода и катода, еще *управляющую сетку*. Полупроводниковый триод — *транзистор* — также имеет три контакта: *эмиттер*, *коллектор* и *базу*. Транзистор проводит ток лишь в одном направлении (это направление указывается на схеме стрелкой); база играет роль управляющей сетки: при подаче на нее соответствующего потенциала транзистор отпирается (проводит ток), а без него — запирается. Сказанного достаточно для понимания работы инвертора (рис. 7).

Обладая элементами, осуществляющими три описанные здесь операции, можно построить схему двоичного одноразрядного сумматора, работающего в соответствии с приведенной выше таблицей. Одна из возможных схем сумматора изображена на рисунке 8. Ее составными элементами являются инвертор, собирающие схемы и схемы совпадения. Все они изображены на схеме в виде прямоугольников, в которых написаны сокращенные наименования осуществляемых ими операций.

Рассмотрев последовательно работу всех этих элементов, легко убедиться, что для всех возможных комбинаций входных данных выходы будут соответствовать указанным в таблице. Для облегчения такой проверки на рисунке 8 рассмотрен случай $A=1$, $B=0$, $Z_1=1$, для чего у всех входов и выходов отдельных элементов схемы поставлены соответствующие цифры. На выходе получается $C=0$ и $Z_2=1$, что и должно быть.

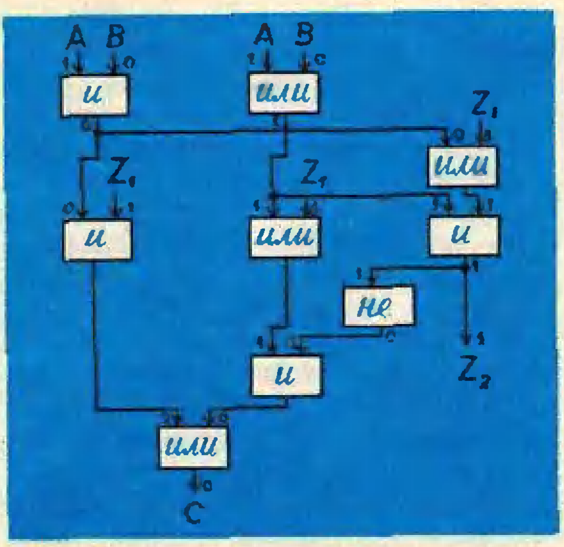


Рис. 8.

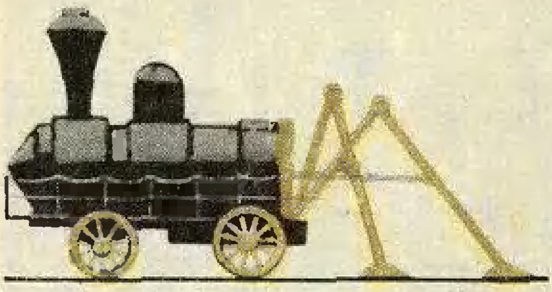


Рис. 9.

Вычислительные машины, работающие в позиционной системе счисления, можно сказать, имитируют поведение человека, считающего «столбиком». В сущности, все машины начинались с подражания виденному, живому: первые «самодвижущиеся повозки» были с «ногами» (рис. 9), а первые летательные аппараты пытались делать с машущим крылом. Не исключено, что будущие, более совершенные вычислительные машины будут работать с совсем иными системами счисления. Пока трудно сказать, каковы должны быть такие системы, но попытки искать новые принципы уже делаются, и об одной из них мы сейчас расскажем.

Недостатком позиционных систем счисления (при использовании их в машинах) являются межразрядные связи, задерживающие выполнение операций: для получения окончательного результата в каком-либо разряде нужно, чтобы предыдущий (младший) разряд был уже обработан. Непозиционные же системы (в других отношениях, как известно, менее удобные) позволяют работать с каждым «разрядом» независимо и отдельно.

Одним из возможных способов представления натуральных чисел, который можно рассматривать как «непозиционную систему счисления», является *система остаточных классов*. В системе остаточных классов число представляется своими остатками от деления на выбранную систему оснований («модулей).

При выборе одного модуля p различными остатками от деления на p обладают p целых чисел, взятых подряд из натурального ряда. Если же модулей несколько, то возможный диапазон чисел, обладающих различными представлениями, расширяется.

Принимая соответствующие остатки за знаки изображения числа, мы получаем непозиционную систему счисления, разрядами которой являются остатки по каждому модулю в отдельности. Цифрами в каждом разряде служат различные остатки, меньшие модуля. Чем большим выбран данный модуль, тем больше диапазон представляемых чисел и тем больше возможных значений остатков (цифр в данном разряде). Вместе с тем, все разряды числа в такой системе счисления совершенно независимы друг от друга.

Арифметические действия в такой системе выполнять очень просто. Например, остаток от деления суммы двух чисел на данный модуль p равен сумме остатков, образованных отдельными слагаемыми, если эта сумма меньше p, либо на p меньше этой суммы. Аналогичное правило верно и для операции умножения.

Рассмотрим в качестве примера систему остаточных классов, определяемую тремя модулями $p_1=7$, $p_2=9$, $p_3=10$. Число n в этой системе будем записывать в виде (a, b, c), где a, b, c — соответственно остатки от деления n на p_1, p_2, p_3. Такое представление определяет однозначно натуральные числа в диапазоне $0 \leqslant n \leqslant 629$, причем возможные значения a, b, c заключены в пределах $0 \leqslant a \leqslant 6$, $0 \leqslant b \leqslant 8$, $0 \leqslant c \leqslant 9$. Например:

$$5=(5,5,5);\quad 20=(6,2,0);$$

Арифметические действия:

$$(3,2,1)+(1,4,4)=(4,6,5);$$
$$(2,5,3)\times(2,7,6)=(4,8,8).$$

(В десятичной системе эти равенства переходят соответственно в $101+274=375$, $23\times16=368$.)

Мы вовсе не утверждаем, конечно, что именно арифметика остаточных классов непременно найдет применение при создании новых вычислительных машин (хотя бы по той причине, что при этой системе затруднено сравнение чисел, нужное для многих целей). Но она представляет простой и поучительный пример связи «абстрактных» (и несколько «старомодных» и вполне традиционных) теоретико-арифметических закономерностей с «чисто техническими» проблемами современной машинной математики.

Беседа о принципе неопределенности

М. Я. Азбель

Во втором номере нашего журнала за 1971 год была напечатана статья М. Я. Азбеля «Диалог о температуре». Статья вызвала много откликов читателей. Во всех письмах говорилось о том, что статья интересна. Однако в статье было много опечаток, за которые редакция и автор приносят свои извинения. В письмах читатели ставили очень интересные вопросы. Поэтому мы решили не давать просто список опечаток, а попросить автора продолжить разговор с читателем.

А в т о р. Я никак не ожидал, что редакция поможет мне превратить воображаемый диалог с читателем в реальный, и даже не диалог, а беседу. Вот что пишет читатель Володя Маргулис из Саранска.

В. М а р г у л и с. В вашей статье «Диалог о температуре» содержится, мне кажется, множество опечаток. Постоянные Больцмана и Планка завышены на два порядка, заряд электрона — на порядок и так далее.

А в т о р. Вы совершенно правы. Открою вам профессиональный секрет: как и многие физики-теоретики, я помню только одну систему единиц: CGSE. В ней были проведены все оценки и приведены константы в моей статье: постоянная Планка $h \approx 6{,}5 \times 10^{-27}$ *эрг·сек*, постоянная Больцмана $k \sim 10^{-16}$ *эрг/град*, заряд электрона $e \sim 5 \cdot 10^{-10}$ ед. CGSE. (Напомню, что нас интересует только порядок величины!)

Однако в статье, вышедшей в журнале, все вычисления оказались в системе СИ и притом в «деформированном виде». Это, конечно, неприятно, но большой беды тут нет. Каждому читателю-школьнику, которому положено знать системы единиц, будет полезно проделать расчеты и вернуть им правильный вид. Полезно и поучительно. Дело в том, что описки и опечатки в научных статьях — явление нередкое, и надо учиться относиться к ним без волнения, исправляя по мере надобности.

В. М а р г у л и с. Я так и поступил, но правильный расчет дал для электронов потенциальную энергию на два порядка меньше кинетической. А для гелия потенциальная энергия оказалась значительно больше кинетической! *)

---

*) Для тех, кто не читал статьи «Диалог о температуре», поясню, о чем идет речь. Из так называемого принципа неопределенности следует, что наименьшее возможное значение импульса $p_{\min}$ частицы, сосредоточенной в области, размеры которой порядка a, $p_{\min} \sim \frac{h}{a}$. Отсюда наименьшая возможная кинетическая энергия $E_{\text{кин}} \sim \frac{p_{\min}^2}{2m} \sim \frac{h^2}{2ma^2}$, где m — масса частицы.

А в т о р. Вас подвела очередная опечатка. Во всех формулах статьи правильнее писать постоянную Планка h, а не $\hbar=\frac{h}{2\pi}$. Поэтому кинетическая энергия нулевых колебаний в гелии порядка

$$\frac{h^2}{2ma^2}\sim 2\cdot 10^{-15}\ \textit{эрг}\sim 20^\circ\text{K}$$

(поскольку $m\sim 10^{-23}$ *г*, $a\sim 3\cdot 10^{-8}$ *см*). Эта величина всего в 5 раз превышает действительную, несмотря на грубость оценки.

Расчет потенциальной энергии взаимодействия атомов гелия я не производил, так как этого нельзя сделать, исходя из общих соображений.

В. М а р г у л и с. Теперь мне ясна также ситуация с электронным газом. По формуле $E_{\min}\sim\frac{h^2}{2ma^2}$ при $a\sim 3\cdot 10^{-8}$ *см* получается около $2\cdot 10^{5\circ}$ К. А поскольку a может меняться, оценка имеет смысл только по порядку величины. Электронный газ действительно имеет энергию в десятки, даже сотни тысяч градусов.

А в т о р. Совершенно верно. Должен в заключение сказать, что мне очень понравилось ваше письмо. С удовольствием желаю вам успехов в продвижении к науке. И еще — прошу прощения и у вас, и у всех остальных участников нашей беседы за превращение их писем в реплики.

Ч и т а т е л ь М. М о х н а т к и н (Саратов). А меня вы еще не убедили. Ведь согласно принципу неопределенности

$$\Delta p_x\cdot\Delta x=h,$$

а не $\Delta p\cdot\Delta x=h$, как написано в «Диалоге». Значит, поскольку $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$, приведенное значение минимальной энергии следует утроить!

А в т о р. Если бы в соотношении неопределенности стоял знак равенства, вы были бы совершенно правы. Но очень важно помнить: речь идет только о порядке величины. Допустим, для определенности, что наибольшим из Δp_x, Δp_y, Δp_z является Δp_x. Тогда для $\Delta p=\sqrt{(\Delta p_x)^2+(\Delta p_y)^2+(\Delta p_z)^2}$ получаем $\Delta p_x\leqslant\Delta p\leqslant\Delta p_x\sqrt{3}$, так что заведомо $\Delta p\sim\Delta p_x$ и $\Delta p\Delta x\sim h$.

При вычислениях порядков величин важно не превышать точности расчета, «уточняя» коэффициенты — это может только ухудшить дело. Такие расчеты очень полезны, но они не могут дать больше того, на что рассчитаны — ошибка в десять раз естественна.

В частности, для свободной частицы, «запертой» в сферическом ящике диаметра a, точный расчет дает как раз

$$E_{\min}=h^2/2ma^2$$

Ч и т а т е л ь В. Р у б и н (Москва). А почему вы в случае электронного газа говорите о кулоновском взаимодействии? Ведь электроны сами по себе никак не могли бы образовать кристалл — они отталкиваются друг от друга!

А в т о р. Конечно. Поэтому я говорил об электронах в металле. Там им не дают разлететься положительные ионы. К взаимодействию с ними и относился расчет. А кулоновским взаимодействие было взято по следующей причине. Само по себе электростатическое взаимодействие является классическим. Пусть на каждый атом приходится один свободный электрон, так что единственное характерное расстояние задачи — межатомное (точнее, межионное) расстояние a, и нас интересует расстояние только такого порядка. Тогда единственная величина, имеющая размерность энергии, которую можно сконструировать из a и заряда электрона e, есть $\frac{e^2}{a}$.

Конечно, такая запись верна только по порядку величины и только на таких расстояниях. На бо́льших расстояниях разноименные заряды экранируют друг друга, и взаимодействие быстро убывает с расстоянием.

В. Р у б и н. Еще один вопрос. Почему, если у вас для электрона в ядре получается скорость, превышающая световую, вы все-таки используете нерелятивистские формулы?

Автор. Потому что мне хотелось показать: в нерелятивистской квантовой механике наличие «запертых» электронов в ядре приводило бы к неприятностям. А это наводит на мысль, что, вероятно, они там не могут быть заперты. Однако вы, конечно, правы: подобное рассуждение не есть доказательство.

Коль скоро об этом зашла речь, давайте произведем более аккуратный расчет. Используя опять принцип неопределенности, получаем порядок минимального импульса $p_{\min}$ электрона, «запертого» в ядре радиуса R, $p_{\min} \sim \frac{h}{R}$. По теории относительности $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (m_0 — масса покоя частицы, v — ее скорость). «Наш» импульс $p_{\min} \gg m_0 c$. Это означает, что $v \approx c$ и $p \approx mc$ (m — масса релятивистского электрона). Значит, для электрона, «запертого» в ядре, $m \sim \frac{h}{Rc}$, что дает величину порядка массы покоящегося протона. Следовательно, близость массы ядра к сумме масс только протонов и нейтронов означает отсутствие электронов, «запертых» в ядре: попав в ядро, они с легкостью вырываются оттуда.

Вы видите, сколь существен размер области, в которой сосредоточены частицы. Эта область может либо строго ограничивать их движение, как ядро — движение протонов и нейтронов или атом — движение электронов, либо быть характерной лишь с точки зрения принципа неопределенности.

Читатель А. Петров (Ленинград). Если среднее расстояние между частицами a, то $\Delta x \neq a$ и возможно даже $\Delta x = L$, где L — размер системы. Значит, $p_{\min} \sim \frac{h}{L}$!

Автор. Совершенно верно. Мы оцениваем характерную энергию, а она определяется средним расстоянием a. Наименьшая же возможная энергия есть $\frac{h^2}{2mL^2}$, причем возможны и промежуточные значения энергии, соответствующие $a < \Delta x < L$.

Поясню это замечание подробнее. Среднее расстояние между электронами в металле a определяет характерное расстояние в принципе неопределенности и характерную энергию нулевых колебаний, оценивавшуюся нами. Однако, в принципе, отдельные электроны могут находиться в редко встречающихся состояниях, оказываясь друг от друга на расстоянии порядка размеров системы L. В соответствии с этим минимальная кинетическая энергия (энергия нулевых колебаний), которую имеет очень небольшое число электронов, порядка $\frac{h^2}{2mL^2}$, то есть крайне мала.

И здесь уже проявляется кардинальное отличие фермиевских и бозевских частиц.

Поскольку бозевские частицы могут в любом состоянии собираться в неограниченном количестве, при очень низких температурах они начнут скапливаться именно в состояниях с ничтожной энергией — начинается так называемая конденсация Бозе — Эйнштейна в пространстве энергий.

Сказанного достаточно, чтобы получить основные характеристики Бозе-газа. Начнем с рассмотрения теплового излучения, сосредоточенного в полости нагретого тела (и находящегося в равновесии с этим телом). Так как тепловое излучение состоит из квантов электромагнитных волн (фотонов), число которых в единице объема определяется температурой излучающего их нагретого тела, единственной энергетической характеристикой оказывается температура. Поэтому средняя энергия фотона ε порядка kT. Теперь у нас задано не размытие расстояния, а тепловое размытие энергии. Перепишем принцип неопределенности в несколько ином виде, введя характерное время Δt:

$$h \sim \Delta p \Delta x \sim \frac{\Delta p}{\Delta t} \Delta x \Delta t.$$

Но изменение импульса за данное время есть произведение силы на время ее действия: $\Delta p = F\Delta t$. Значит, $\frac{\Delta p}{\Delta t} \Delta x = F\Delta x$ есть работа силы на пути Δx, то есть, согласно закону сохранения энергии, изменение энергии ΔE. Таким образом,

$$\Delta E \Delta t \sim h$$

(очень важная форма принципа неопределенности).

Для фотонов $\Delta E \sim \varepsilon$, а величина Δt — порядка времени τ, характеризующего период колебаний фотонов. Поэтому $\varepsilon\tau \sim h$ и $\varepsilon \sim h\nu \left(\nu = \frac{1}{\tau}\right)$.

Из полученного равенства, учитывая, что $\varepsilon \sim kT$, находим период колебаний $\tau = \frac{1}{\nu} \sim \frac{h}{kT}$ и длину волны λ (расстояние, проходимое волной, движущейся со скоростью света c за период колебания τ):

$$\lambda = c\tau \sim \frac{ch}{kT}.$$

Длина волны определяет характерное расстояние, «приходящееся на квант» *). Соответствующий объем есть λ^3, так что число фотонов в единице объема порядка

$$\lambda^{-3} \sim \left(\frac{kT}{ch}\right)^3.$$

Полная же их энергия в единице объема, то есть плотность энергии теплового излучения,

$$E_1 \sim kT \cdot \lambda^3 \sim \frac{(kT)^4}{(ch)^3}.$$

Мы получили знаменитую формулу Стефана — Больцмана! Точная формула отличается коэффициентом $\frac{\pi^2}{20} \approx \frac{1}{2}$.

А теперь перейдем от макромира газов к микромиру ядра. Попробуем оценить порядок величины ядерных сил, ничего не зная о них, кроме того, что радиус ядра $R \sim 10^{-12}$—10^{-13} *см*, и оно состоит из взаимодействующих между собой протонов и нейтронов. Кинетическая энергия порядка $\frac{h^2}{MR^2}$. А так как ядро не разваливается и не сжимается, а удерживается в равновесии ядерными силами, потенциальная энергия взаимодействия должна быть порядка кинетической!

Вот мы и добрались до энергии в тысячи миллиардов (10^{12}) градусов. Не забывайте только, что это именно э н е р г и я, измеренная в градусах, а отнюдь не т е м п е р а т у р а частиц в ядре!

А разница масс ядерных частиц — протона и нейтрона — порядка массы электрона m_e. (Это не случайно, поскольку нейтрон может превращаться в протон и электрон.) Значит, связанная с зарядом энергия порядка m_ec^2, то есть «всего» порядка 10^{10} градусов и значительно меньше энергии ядерного взаимодействия. Поэтому ядерные силы практически не зависят от заряда, а говорить о нейтронах и протонах в ядре как об отдельных частицах не имеет смысла, и их называют просто «нуклонами».

А какова скорость ядерных частиц? В нерелятивистской механике $\frac{Mv^2}{2} \sim \frac{h^2}{MR^2}$ и $v \sim \frac{h}{MR}$. Получается скорость порядка скорости света! Более точная оценка приводит к $v \sim 0{,}1\ c$, поэтому во многих случаях для частиц в ядре в грубом приближении удается ограничиться нерелятивистской теорией.

Как видите, понимание фундаментальных физических законов дает фундаментальные физические следствия, из которых мы затронули лишь малую часть.

*) Конечно, это утверждение выглядит не очень убедительным, но оно оказывается правильным, а потому просто примите его на веру.

Упражнения

1. Определите зависимость давления от плотности частиц (их числа в единице объема) в идеальном фермиевском газе *) при низких температурах. Получите уравнение состояния такого газа (с точностью до численного множителя). Сравните его с уравнением состояния классического газа.
2. Найдите критерий квантовости идеального фермиевского газа.
3. Определите зависимость от температуры теплоемкости бозевского газа при низких температурах.
4. Найдите критерий классичности и квантовости бозевского газа.
5. Оцените размер атома водорода.
6. Зная, что связь атомов в жидкостях и кристаллах определяется в основном электростатическим взаимодействием, оцените расстояние между атомами.

*) См. «Диалог о температуре».

И.А.МАРОН

М.В. ОСТРОГРАДСКИЙ

(К 170-летию со дня рождения)

По-разному складываются судьбы научных идей и открытий.

Одни, заинтересовав поначалу современников, умирают еще при жизни их автора. Другие, просуществовав многие годы, все же, в конце концов, морально устаревают и заменяются новыми, более оригинальными, более целесообразными. Третьи, как бы оказываются неподвластными времени. Им нет износа. Таким завидным запасом прочности и долговечности обладает научное и педагогическое наследие выдающегося русского математика и просветителя Михаила Васильевича Остроградского.

М. В. Остроградский родился 24 сентября 1801 года в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии (теперь Козельщанский район Полтавской области УССР) в семье небогатого помещика.

В 1816 году он поступил на физико-математическое отделение Харьковского университета и вскоре стал удивлять всех своими необыкновенными успехами в изучении математики. На Остроградского обратил внимание ректор университета, профессор Т. Ф. Осиповский — талантливый математик и выдающийся педагог. Он приблизил к себе многообещающего юношу и руководил его занятиями.

В октябре 1818 года Остроградский окончил Харьковский университет, а в 1820 году он успешно сдал экзамены на звание кандидата наук, и перед ним, казалось, открывалась прямая дорога к университетской профессуре.

Однако ученой степени Остроградский не получил, и причиной тому послужила острая идейная борьба, развернувшаяся в Харьковском и других университетах России, вызванная наступлением реакции в последние годы царствования Александра I. Первыми жертвами реакции стали просвещение и университеты.

Мракобесы разных мастей и рангов — от попечителей учебных округов, которым подчинялись университеты, до проходимцев, захвативших там кафедры, ополчились на все передовое и прогрессивное. Разумеется, в таких условиях профессор Осиповский — любимец передового студенчества, человек откровенно материалистических убеждений — пришелся не ко двору. Его уволили в отставку, одновременно нанеся удар и по его единомышленникам и поклонникам. Одному из первых досталось лучшему ученику Осиповского — Остроградскому, на которого донесли, что он не посещал лекций по философии и по обязательному для всех студентов «богопознанию и христианскому учению». На этом ничтожном, надуманном основании ему не только отказали в присуждении степени кандидата наук, но и лишили его диплома об окончании университета. Это было неслыханным глумлением над будущим ученым, чей талант был замечен уже тогда.

К счастью, мракобесам не удалось погубить талант Остроградского. Наоборот, в нем сильно укрепилась любовь к математике, и он решает продолжить свои занятия в Париже под руководством выдающихся математиков Политехнической школы — детища французской революции. Он приезжает туда в мае 1822 года. В политехнической школе, Сорбонне, коллеж де Франс он слушает лекции знаменитых ученых: Коши, Фурье, Лапласа, Монжа, Пуассона, Лежандра, Штурма, Понселе, Бине и других, пролагавших новые пути в математическом анализе, математической физике и механике. Изучив и усвоив результаты, достигнутые французской математической школой, Остроградский и сам стал заниматься важными и актуальными вопросами того времени, часто опережая своих парижских коллег. В 1826 году русский ученый представил Парижской Академии наук свою первую научную работу — «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», высоко оцененную Коши и напечатанную в трудах Академии. О научном значении этой работы можно судить хотя бы по тому, что еще в 1816 году Академия объявила специальный конкурс на ее решение.

В 1824—1827 годах Остроградский представил еще несколько мемуаров. Эти работы укрепили научную репутацию молодого ученого и завоевали ему дружбу и уважение многих французских математиков.

Но Михаила Васильевича неумолимо тянет на родину, где об его успехах хорошо знали. Недаром молодых людей, отправлявшихся учиться за границу, родные и близкие напутствовали словами: «Становись Остроградским».

В 1828 году он выехал в Россию. Тяжелой была эта поездка. В дороге его обокрали, и ему пришлось от Франкфурта-на-Майне до Петербурга добираться пешком. «Русский пешеход», пробирающийся к тому же из-за границы, выглядел весьма подозрительным, и мнительные власти, которым везде чудились восстания декабристов, установили за ним тайный полицейский надзор. Вероятно, об этом Остроградский не знал до конца своих дней.

Сразу же после приезда Остроградского в Петербург началась его плодотворная работа в Академии наук и кипучая педагогическая деятельность. Академия наук высоко оценила научную деятельность Остроградского: в августе 1830 года его избрали экстраординарным, а через год — ординарным академиком по прикладной математике. С этого времени его жизнь была полна творческих удач, и деятельность его отмечалась присвоением ряда почетных ученых званий. Так, в 1834 году он был избран членом Американской Академии наук, в 1841 году — членом Туринской Академии, в 1853 году — членом Римской Академии Линчей и в 1856 году — членом-корреспондентом Парижской Академии.

Научные интересы Остроградского определились рано, еще до отъезда в Париж. В объяснении совету Харьковского университета Остроградский еще в 1820 году писал, что желает «усовершенствовать себя по части наук, относящихся к прикладной математике». И действительно, многие свои труды он посвятил математической физике и механике, заложив вместе с Лапласом, Пуассоном, Фурье, Коши, Якоби, Гамильтоном фундамент этих наук.

По математической физике Остроградский написал 15 работ. Бóльшая часть их относится к задачам распространения тепла, теории упругости и гидродинамики. Наибольшее научное значение имеют его работы по теории теплоты. Эти исследования, помимо того, что содержат важнейшие результаты, относящиеся непосредственно к теории распространения тепла, имеют огромное общематематическое значение, поскольку в них, с одной стороны, заложены начала для ряда важных теорий, развивающихся и в наше время, а с другой стороны, в них получены теоремы, являющиеся одним из центральных результатов математического анализа.

Первым из русских ученых Остроградский стал заниматься аналитической механикой. Его труды по механике, включая «Лекции по аналитической механике» и «Курс небесной механики», явились фундаментом, на котором строилась и развивалась русская школа в области механики. Работы Остроградского по математическому анализу в большинстве случаев вызваны его исследованиями по математической физике и механике: они дают решение математических вопросов, поставленных теоретическим естествознанием того времени. Так, в связи с исследованиями вопросов распространения тепла в твердом теле он получил знаменитую формулу, вошедшую теперь во все учебники математического анализа под именем формулы Остроградского — Грина. В настоящее время эта формула играет огромную роль в математической физике, векторном анализе и других разделах математики и ее приложений. Не будет преувеличением сказать, что Остроградский внес выдающийся вклад и в область математического анализа. Его результаты вошли в современную математику в качестве существенной и неотъемлемой ее части и представляют собой то необходимое оружие, без которого математика уже не может обойтись.

В круг интересов Остроградского входили также и алгебра, и теория чисел, и теория вероятностей. По словам Н. Е. Жуковского, «в творениях М. В. Остроградского нас привлекает общность анализа, основная мысль, столь же широкая, как широк простор его родных полей».

Остроградский оказал неоценимую услугу русской науке, воспитав целую плеяду талантливых учеников, ставших впоследствии выдающимися представителями русской науки. В числе его учеников были: И. А. Вышнеградский — основоположник теории автоматического регулирования; Н. П. Петров — создатель гидродинамической теории смазки и автор классических исследований по теории механизмов; А. Н. Тихомандрицкий, Е. И. Бейер, Д. М. Деларю, Е. Ф. Сабинин — известные профессора математики, и многие другие математики и выдающиеся инженеры.

Замечательной чертой передовых представителей русского естествознания вообще и математиков в частности являлось то, что они были не только новаторами в науке, смелыми мыслителями, но и учителями в широком смысле этого слова; они не замыкались в круг своих научных интересов, а значительную часть времени и сил отдавали делу просвещения.

Прогрессивное значение педагогической деятельности русских математиков заключается не только в их личном преподавании, а в том, что они принимали активное участие в общем педагогическом движении и оказали существенное влияние на развитие математического просвещения и культуры в России. Педагогическая деятельность М. В. Остроградского в этом отношении особенно характерна.

Человек своего времени, смелый мыслитель и блестящий лектор, он много и плодотворно работал на педагогическом поприще. В разные годы он преподавал в Офицерских классах при Морском кадетском корпусе, открытых по инициативе известного мореплавателя и ученого И. Ф. Крузенштерна; был профессором Института корпуса инженеров путей сообщения, лучшего в то время технического учебного заведения страны (ныне Ленинградский институт железнодорожного транспорта); читал курс лекций на физико-математическом отделении Главного педагогического института, в стенах которого учились Д. И. Менделеев, Н. А. Добролюбов, И. А. Вышнеградский. Он преподавал с 1841 года в Офицерских классах Главного артиллерийского и Главного инженерного училищ. Остроградский до конца своей жизни оставался профессором всех этих учебных заведений. Ему принадлежит заслуга высокой постановки математического образования во всех существовавших тогда военно-технических учебных заведениях Петербурга.

Педагогическая деятельность Остроградского не ограничивалась только личным преподаванием. Около двадцати лет он руководил преподаванием математики в военно-учебных заведениях России, занимая должность главного наблюдателя. За это время Остроградский провел огромную организационную и методическую работу, направленную на повышение общего уровня математического просвещения. Он привлек к этому крупнейших математиков и механиков того времени: В. Я. Буняковского, О. И. Сомова, А. Н. Савича, И. А. Вышнеградского, Г. Е. Паукера, Д. М. Перевощикова, П. Л. Чебышева и др.

На основе составленных при участии и под руководством Остроградского учебных планов, программ и конспектов были составлены учебные руководства по математическим наукам для военно-учебных заведений. Эти книги оставили глубокий след в преподавании математических дисциплин в России и в истории развития учебных руководств по математике. Не остался в стороне и сам Остроградский, написавший несколько учебных пособий и трехтомное «Руководство начальной геометрии».

Остроградский был решительным сторонником введения в старших классах средних школ идеи функции и начал анализа. По его инициативе в 1850 году в кадетских корпусах были введены элементы высшей математики.

Он шел еще дальше и утверждал, что основные понятия высшей математики должны стать достоянием широких кругов грамотных людей.

Остроградский настойчиво добивался, чтобы преподавание математики и механики было увязано с физикой и естествознанием. По его инициативе созывались объединенные совещания математической и физической комиссий для совместного обсуждения программ*). Таким образом, есть все основания заключить, что в ряде пунктов Остроградский предвосхитил идеи известного международного движения за реформу преподавания, возникшего в XX веке.

Педагогические интересы Остроградского не ограничивались лишь вопросами методики математики. Его глубоко интересовали и общие проблемы воспитания и образования, которыми он особенно увлекался в последние годы своей жизни. Примечательно в этом отношении его сочинение «Размышления о преподавании», написанное совместно с французским математиком А. Блумом.

Высказанные в нем идеи настолько свежи, интересны, что, появись эта брошюра в наши дни, она была бы воспринята советским читателем как увлекательное педагогическое сочинение, толкующее о вполне современных педагогических проблемах.

Таким образом, Остроградский выступает перед нами не только как крупнейший математик своего времени, но и как замечательный деятель, отдавший много труда и творческой энергии делу отечественного просвещения вообще и математического в частности. Эту прекрасную традицию с честью продолжают наши советские математики.

---

*) Главным наблюдателем за преподаванием физики в военно-учебных заведениях был академик Э. Х. Ленц.

Я. А. Смородинский

Похожие движения

Существует ряд механических движений, которые хотя и различны, но описываются одними и теми же формулами. Поэтому, если мы выясним, как меняются какие-то величины при одном движении, можно сделать выводы для аналогичных. Расскажем о двух таких движениях.

1. Гармонические колебания

Между движением по окружности и гармоническим движением можно установить полезное соответствие. Рассмотрим материальную точку, которая движется равномерно по окружности. Ее скорость равна v и направлена по касательной к окружности. Если радиус окружности обозначить через R, то центростремительное ускорение точки равно $\frac{v^2}{R}$ и направлено по радиусу к центру (рис. 1).

Посмотрим, как движется проекция точки на диаметр окружности. Из рисунка ясно, что если положение точки на окружности задается углом φ, то положение ее проекции определяется координатой

$$x = R\cos\varphi. \qquad (1)$$

Проекция скорости на диаметр (обозначим ее через u) равна

$$u = -v\sin\varphi \qquad (2)$$

и, наконец, проекция ускорения

$$a = -\frac{v^2}{R}\cos\varphi. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (3) легко получить, что

$$a = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x. \qquad (4)$$

С таким же ускорением двигалась бы материальная точка с массой m под действием силы

$$F = am = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)xm. \qquad (5)$$

Такая сила, пропорциональная координате, называется гармонической, а движение под действием такой силы — гармоническим движением.

Введем вместо линейной скорости угловую $\omega = \frac{v}{R}$ (в *рад/сек*). Тогда $\varphi = \omega t$ и

$$x = R\cos\omega t, \quad u = \omega R\sin\omega t,$$
$$a = -\omega^2 R\cos\omega t.$$

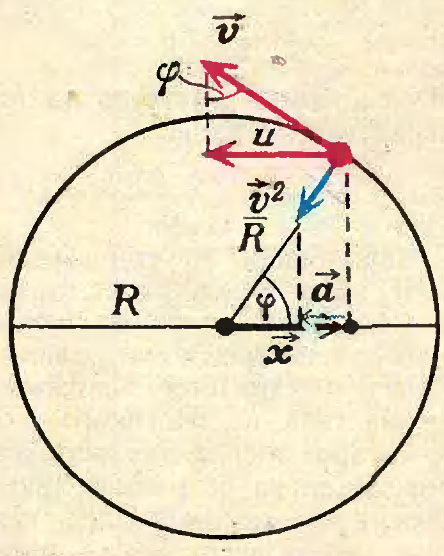


Рис. 1.

Таким образом, мы получили все характеристики гармонического движения. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию точки на окружности можно заменить реальной частицей, движение которой будет описываться полученными выше формулами.

Напомним, что входящие в уравнение Ньютона величины F и a — векторы. Их, следовательно, можно спроектировать на любое направление, и зависимость между проекциями будет описываться уравнением Ньютона.

Туннели в Земле

Покажем, что на точку, находящуюся внутри Земли, действует тоже гармоническая сила (вне Земли на точку действует сила $F=\gamma \frac{Mm}{R^2}$).

Пусть материальная точка массы m находится на расстоянии r от центра Земли. Действие, которое оказывает на точку Земля, можно разбить на две части (рис. 2): действие внутренней сферы (красной) и действие внешнего сферического слоя (желтого).

Как известно, сферический слой не создает внутри себя поля тяжести (если плотность ρ в нем постоянна) *). Поэтому на точку будет действовать только «красная часть», масса которой

$$M=\frac{4}{3}\pi r^3\rho. \qquad (7)$$

Сила, с которой действует на точку «красная часть», равна

$$F=-\gamma\frac{Mm}{r^2}=-\gamma\frac{4\pi\rho m}{3}\cdot r. \qquad (8)$$

Следовательно, внутри Земли (в туннеле) на точку действует гармоническая сила, пропорциональная расстоянию от центра Земли. Движение в туннеле оказывается похожим на движение тела, подвешенного к пружине — упругая сила пружины также пропорциональна ее растяжению.

Теперь мы можем решить такую задачу: через центр Земли прорыт

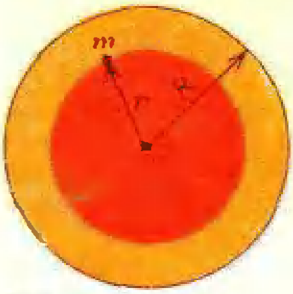


Рис. 2.

Рис. 3.

узкий туннель (рис. 3). В него уронили из точки A (без начальной скорости) камень. Камень долетит до точки B и начнет падать обратно, долетит до точки A и начнет падать к точке B и так далее. Как найти период колебаний?

Фактически, эту задачу мы уже решили. Движение камня в туннеле можно рассматривать как движение проекции точки, вращающейся вокруг Земли у ее поверхности (например, спутника на круговой орбите вблизи Земли). Поэтому частота колебаний камня в туннеле равна угловой частоте вращения спутника вокруг Земли. Так как центростремительное ускорение спутника $a=\omega^2R$ (расстояние от спутника до поверхности Земли $h\ll R$) и $a=\frac{F}{m}$, то

$$\omega=\sqrt{\frac{a}{R}}=\sqrt{\frac{F}{mR}}=\sqrt{\gamma\frac{4\pi\rho mR}{3mR}}=$$
$$=\sqrt{\gamma\frac{4\pi\rho}{3}}. \qquad (9)$$

---

*) Или плотность зависит только от радиуса, но не зависит от углов (см. «Квант» № 5 (1971), решение задачи № Ф43 «Задачника «Кванта»).

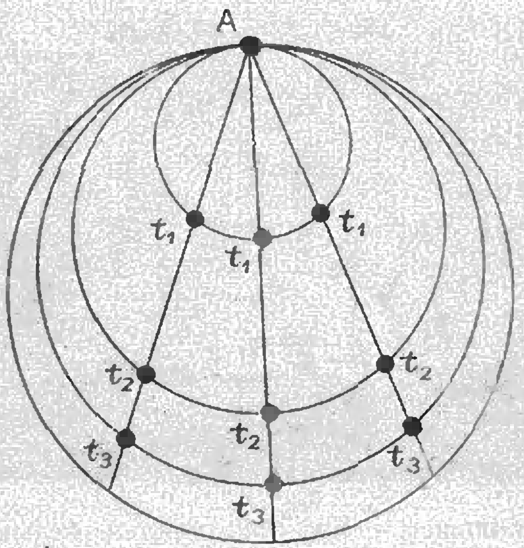


Рис. 4

Период колебаний, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}}. \qquad (10)$$

Следует отметить, что формула (10) определяет и период колебаний тел в туннеле, проведенном через Землю в любом направлении (не обязательно через центр). Это следует из приведенного выше утверждения о том, что уравнение Ньютона остается справедливым, если входящие в него векторные величины заменить их проекциями на любое направление. Однако, можно провести доказательство и непосредственно, заметив, что хорда во столько же раз меньше диаметра, во сколько проекция силы на направление хорды меньше самой силы. Попробуйте сделать это сами.

Тот же период будет описывать и движение точки по подземному круговому туннелю с центром в центре Земли. (Докажите.)

Теперь вы, наверное, сами можете показать, что если одновременно уронить несколько тел в разные туннели, исходящие из одной точки A (рис. 4), то в любой момент времени t_1, t_2, ... они будут находиться на окружности, проходящей через точку A.

ДВЕ ЗАДАЧИ

1. После смерти отца наследство размером в 1320 рублей было распределено в соответствии с завещанием между его тремя сыновьями и больницей. Если бы первый сын наряду со своей долей получил также и долю, завещанную больнице, то общая сумма полученного им наследства равнялась бы сумме долей двух других сыновей. Если бы доля, завещанная больнице, досталась второму сыну, то вместе с причитающейся ему долей он получил бы в два раза больше, чем его братья. Если бы доля больницы перешла в пользование третьего сына, то вместе с причитающейся ему долей общая сумма денег в три раза превысила бы сумму наследств двух его братьев. Найти размер каждого наследства.

2. В известной игре в «пятнадцать» фишки расположены таким образом, как это показано на рисунке.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Необходимо переместить их так, чтобы сумма фишек, расположенных в каждом из четырех столбцов, в каждой из четырех строк и в каждой из двух диагоналей равнялась бы 30. Найти наименьшее число движений и указать их последовательность. Решение может быть найдено при помощи самодельных картонных фишек с цифрами, которые должны располагаться в указанном выше порядке.

А. Дмитриев

Отражения самых различных источников света от поверхности воды часто имеют вид длинных дорожек света, направленных от источника к нашему глазу. Вспомните хотя бы отражение Солнца в море во время заката или отражения уличных фонарей на набережной в реке. Широкую полосу света отбрасывает Луна, отражаясь в море или озере.

Все эти явления происходят вследствие того, что каждая маленькая волна на поверхности воды дает свое отдельное изображение. Попробуем разобраться, почему все освещенные волны вместе образуют продолговатую фигуру, вытянутую от источника света к наблюдателю — дорожку.

Рябь образуется на воде при ветре от 2 до 13 *м/сек*. При меньшем ветре поверхность воды отражает как плоское зеркало (состояние штиля). При большем — она покрывается белыми барашками, и световая дорожка теряет резкие очертания. Рябь можно представить как множество мелких волн, разбросанных по поверхности воды абсолютно неправильно и возникающих одинаково часто во всех направлениях. Крутизна склона волн при этом не превышает некоторого предельного значения α, которое зависит от силы ветра и может достигать 20—30°.

Попробуем теперь найти границу полосы света, несколько упростив задачу. Именно, будем считать, что в каждом месте поверхности имеется большое число маленьких зеркальных волн, крутизна склонов которых меняется в пределах от нуля до α, и волны имеют различные направления. Кроме того, для простоты будем считать, что наблюдатель и источник

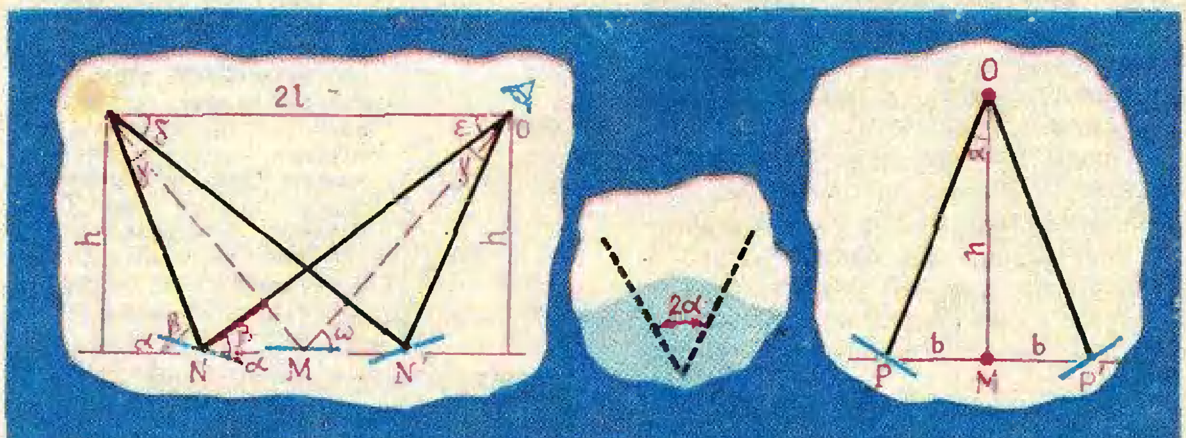


Рис. 1.

Рис. 2.

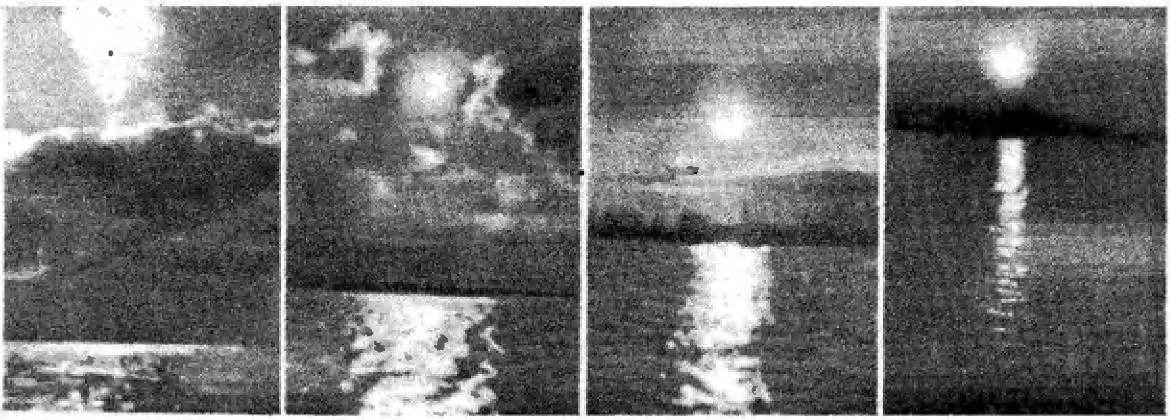


Рис. 3. Скорость ветра (слева направо): 2 *м/сек*, 5 *м/сек*, 12 *м/сек*, 12 *м/сек*. Высота Солнца над горизонтом: 7°, 13°, 20°, 30°.

света находятся на одном уровне над поверхностью воды (рис. 1).

Маленькое горизонтальное зеркальце будет отбрасывать свет в глаз наблюдателя O только в том случае, когда расстояния от него до наблюдателя и до источника одинаковы (в точке M). Если же зеркало наклонено под углом α в сторону наблюдателя, то для того, чтобы отраженный свет попадал в глаз, оно должно быть несколько сдвинуто от наблюдателя (точка N). Зеркальце, наклоненное под углом α в противоположную сторону, должно находиться в точке N'.

Наклонные положения зеркала аналогичны крайним положениям волн, при которых отраженный от них свет еще попадает в наш глаз. Расстояние между N и N' поэтому определяет длину световой дорожки. Во всех точках между N и N' найдутся участки волн, имеющие достаточный наклон для того, чтобы отражать лучи в наш глаз.

Рассмотрим теперь углы между лучами света. Из чертежа видно, что $\beta+\alpha=\gamma+\delta$, $\beta-\alpha=\varepsilon=\delta$, откуда $\gamma=\alpha+\beta-(\beta-\alpha)=2\alpha$. Таким образом мы приходим к выводу, что угол, под которым мы видим большую ось светового пятна, просто равен углу между двумя наиболее крутыми склонами. Нетрудно посчитать и линейный размер большой оси пятна NN'

Короткая ось пятна отраженного света легко находится аналогичным способом. Если сместить зеркальце из точки M в направлении, перпендикулярном NN', то для того, чтобы отраженный свет попал в глаз наблюдателя, зеркальце надо повернуть на некоторый угол вокруг оси, параллельной NN' (рис. 2). Считая, что предельный угол поворота зеркальца по-прежнему равен α, находим, что ширина полосы света $PP'=2h\operatorname{tg}\alpha$, и, следовательно, короткая ось стягивает угол $\beta=\dfrac{2h\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{l^2+h^2}}$.

Отношение двух видимых полуосей пятна будет равно $\beta/2\alpha$ или, считая, что пятно невелико и угол α мал, равно $\beta/2\alpha=\sin\omega$, где ω — угол, под которым мы смотрим на воду.

Чем меньше этот угол, тем более вытянуто пятно. Если взгляд скользит по поверхности, то пятно света будет до бесконечности вытягиваться и суживаться.

При наблюдении световых дорожек на поверхности моря угол ω обычно мал — световые дорожки достигают горизонта (см. фотографии на рисунке 3), так что можно говорить только о ширине дорожки. И хотя полученные нами формулы буквально не применимы в этом случае, пользуясь ими, можно не только качественно объяснить происхождение дорожек, но и понять зависимость их ширины от силы ветра и высоты Солнца над горизонтом: с увеличением α и h ширина дорожки возрастает.

БЛЕСК В ПРИРОДЕ, или почему у кошки глаза светятся

С. А. Хейфец

Тяга к блестящему запрятана где-то в глубинах сознания. Ребенок, впервые увидевший свет, тянется к яркому; туземцы отдают за блестящие безделушки и пищу, и воду. Одаренный, глубокий ум люди называют «блестящим». Мы не будем интересоваться, связано ли это внимание к блестящему с атавистическими воспоминаниями о пляшущем огне или с гипнозом, мы попробуем разобраться, почему появляется блеск — будь то блеск золота, алмаза или кошачьих глаз в темноте.

Мы судим о яркости предмета по количеству света, которое отразилось от него и попало к нам в глаз*). Ясно, что это количество зависит и от доли отраженного света, и от его направленности. Белый лист бумаги отражает лучше черного, зеркальная поверхность — лучше матовой.

Направление света, отраженного от гладкой поверхности, определяется хорошо известным законом: угол падения равен углу отражения. А энергия отраженного света зависит еще и от коэффициента преломления среды n. Если свет падает по нормали на границу сред с показателями преломления n_1 и n_2, то доля отраженной энергии равна $\eta = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$. Для стекла $n = 1{,}52$, для воздуха $n = 1$, так что отражается всего 4,3% падающего света. Для стеклянной пластинки доля отраженной энергии будет примерно в два раза больше, так как часть прошедшего света отразится от второй поверхности стекла и вернется назад. Если лучи падают не вертикально, а под углом, они отражаются лучше (рис. 1). При 60° отражаются от стекла не 4,3%, а 9%; при 80° уже 39%. Когда угол падения приближается к 90° — скользящий луч,— почти весь свет отражается (коэффициент отражения стремится к 100%). Даже очень черные тела, такие как графит, сажа, бархат, начинают блестеть, если смотреть на них под маленьким углом к поверхности.

При нормальном падении света на стеклянную пластинку доля отраженной энергии близка к 8,6%. Мало это или много? Оказывается, немного. Свежий снег отражает 80—85% падающего света, столько же отражают облака.

Однако осколок стекла на снегу легко заметить, так же как и блестки отдельных снежинок. Это объясняется не столько отражательными свойствами пластинки, сколько параллельностью солнечных лучей — рас-

*) Яркость определяется световым потоком, попадающим на сетчатку глаза.

ходимость их составляет всего 31′ (примерно 0,5°, или $^1/_{100}$ *рад*). Если осколок плоский, то и отраженный пучок лучей будет расходиться слабо — на расстоянии 100 *м* его размеры будут порядка метра (если осколок стекла маленький). А поверхность земли, на которой лежит осколок, отражает свет во все стороны (на 180°) поровну, поэтому осколок легко заметить на окружающем фоне. По той же причине «светятся» в темноте кошачьи глаза — падающий на них свет отражается почти параллельным пучком. Подойдите близко — и блеск пропадает, так как преимущество направленного пучка исчезает. (Впрочем, исчезновение блеска при близком рассмотрении — довольно обычная жизненная ситуация.) Если вы летали на самолете, то могли заметить, что реки и озера блестят на солнце точно так же, как далекий осколок стекла. В этом случае коэффициент отражения от поверхности воды 7% — почти такой же, как у стеклянной пластинки, и хотя поверхность озера или реки не бывает такой ровной, как стеклянная пластинка, размеры ее гораздо больше.

Почему же тогда сверкающие снежинки заметны только на небольшом расстоянии, а дальше все сливается в одну белую пелену? Мы уже рассматривали количество света, отраженного от осколка стекла. Однако, кроме «полезных сигналов», есть еще «шум» — средняя освещенность поверхности земли или снега. Особенность нашего глаза состоит в том, что мы способны различить два объекта, если их яркости отличаются не меньше чем на 5—10%. (Правда, это относится к тем случаям, когда яркости не очень малы.) Поэтому, например, способность различать звезды зависит от общей освещенности неба. Теперь ясно, что происходит со снежинкой. Чем дальше, тем меньше ее яркость, так как отраженные лучи все же не строго параллельны. При этом яркость снежинки убывает пропорционально квадрату расстояния. Яркость снежного фона, который

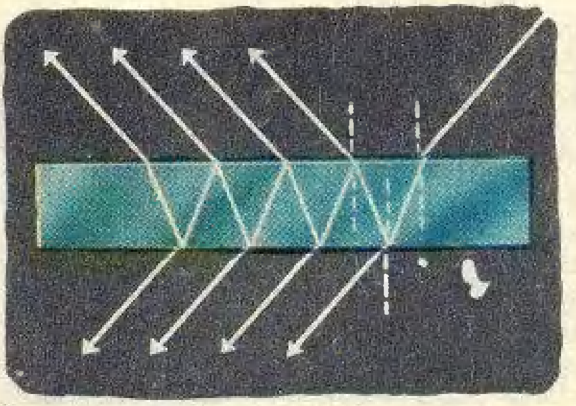


Рис. 1.

можно считать матовой поверхностью, убывает с расстоянием линейно. Проще всего в этом убедиться, заметив, что свет, отраженный равномерно освещенной матовой поверхностью больших размеров, вблизи нее является плоской волной. Для наблюдателя, зрачок которого параллелен поверхности, ее яркость не зависит от расстояния. Если же расстояние до поверхности задано ростом наблюдателя, а угол зрения меняется, то количество света, попадающего в глаз, уменьшается пропорционально косинусу угла зрения. Когда яркости фона и снежинки сравняются, мы снежинку просто не заметим. Попробуйте оценить, на каком расстоянии это должно произойти, и проверьте зимой получившийся результат.

До сих пор мы считали, что луч падает на поверхность из воздуха. При этом большая часть света проходила внутрь тела или поглощалась им. Тело блестело, если отражение

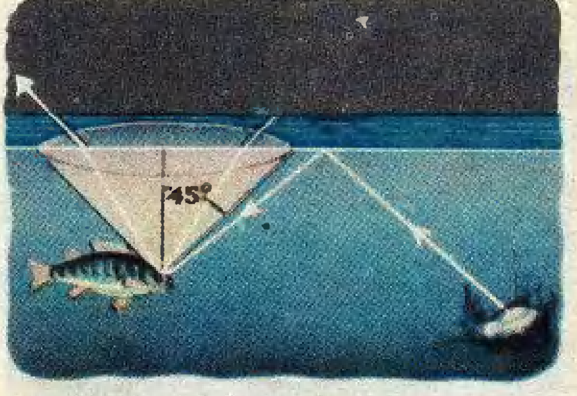


Рис. 2. Для рыб большая часть поверхности зеркальна.

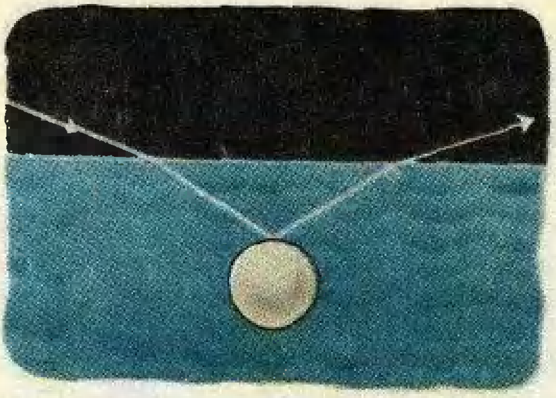


Рис. 3. Отражение от пузырька воздуха.

отличалось направленностью. Исключение составляли «скользящие» лучи. Тогда блеск был следствием почти 100% отражения падающего света. Подобное положение наблюдается, если луч попадает на границу раздела двух сред из более плотной среды. Если свет падает по нормали, то доля отраженной световой энергии определяется той же формулой, что и раньше. Для воды это означает, что 98% света выходит в воздух. С увеличением угла падения β интенсивность преломленного луча уменьшается, и при $\sin\beta=\frac{1}{n}$ преломленный луч исчезает. При этом весь падающий свет отражается от границы — происходит так называемое полное внутреннее отражение. Для стекла $n=1{,}52$, так что лучи, идущие под углом к нормали $\beta\geqslant 36^\circ$, не выходят наружу. Для воды $n=1{,}33$, так что рыба может видеть небо только в «лунку» с углом раствора около 45°

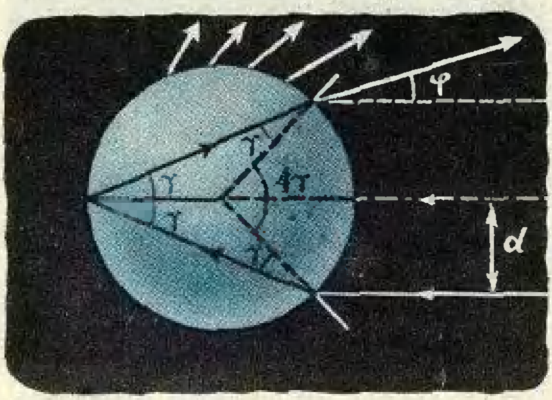


Рис. 4. Ход лучей в капле воды.

(рис. 2). Остальная поверхность воды (с точки зрения рыб) блестит и отражает только дно водоема. Граница раздела при полном внутреннем отражении — идеальное зеркало.

Еще одно интересное применение этого эффекта — светопроводы. Если пустить луч внутрь стекловолокна, то можно потом плавно изгибать эти волокна, даже крутить узлы, и луч света покорно закрутится, следуя закону полного внутреннего отражения.

Опустите в воду лист серебристой ивы. Обратная сторона листа, покрытая множеством пузырьков, начинает серебриться. А сверкание капли росы вам наверняка приходилось видеть. В обоих случаях дело в полном внутреннем отражении: в первом случае — от внешней, во втором — от внутренней поверхности пузырька воздуха или капли росы (рис. 3, 4). Угол между вошедшим в каплю и вышедшим лучами легко определить, если учесть, что радиус перпендикулярен поверхности шара. Этот угол $\varphi=4\gamma-2\alpha$. Впервые такой расчет сделал Декарт. Труднее проанализировать зависимость угла отклонения φ от прицельного параметра d.

Если падающие лучи параллельны, то, пройдя сквозь каплю, они начинают расходиться. Однако существует минимальный угол отклонения. Он близок к 42°. Вблизи этого направления преломленные лучи идут гуще, то есть основная доля преломленных лучей идет именно в этом направлении. Росинка, наблюдаемая под этим углом, блестит особенно ярко. Под этим же углом к солнечным лучам видна радуга.

Где бы ни находился яркий источник света (Солнце, яркое небо), вы всегда сможете наблюдать в росинке его искру-изображение (рис. 5). Отраженные от поверхности капли лучи могут попадать в глаз, даже если угол α близок к 180°. В этом смысле в капле воды действительно отражается весь мир.

Говоря о блеске, нельзя не вспомнить о драгоценных камнях. Обычно

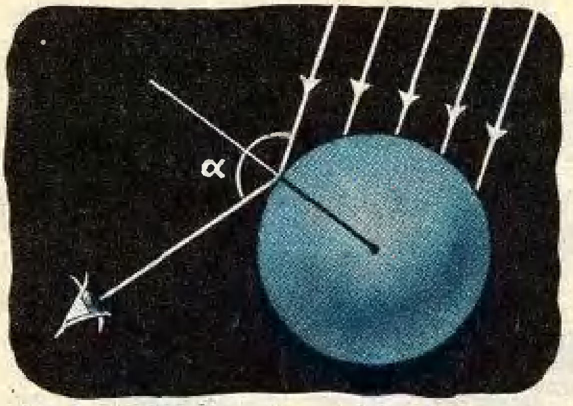


Рис. 5. Отражение от капли.

коэффициент преломления твердых тел равен 1,5—1,6. Исключительными свойствами обладает алмаз. И задолго до того, как человечество поняло его огромную ценность как самого твердого природного материала, люди искали, находили и воспевали алмаз. Коэффициент преломления у алмаза равен 2,42. Легко сосчитать, что коэффициент отражения при этом равен 17% — почти в четыре раза больше, чем у стекла. Но прославился алмаз не за отражение от внешней поверхности, а за отражение от «внутренней» (так же, как это происходит в капле). А если вспомнить, что попадаются кристаллы без внутренних дефектов— алмазы «чистой воды», то сравнение с росинкой становится еще понятнее. Но только обработанный, ограненный алмаз — бриллиант завораживает людей. Угол полного внутреннего отражения алмаза (24°24′) позволяет создать такую огранку, которая заменяет сферическую поверхность капли, концентрируя вышедшие лучи вблизи определенных направлений (рис. 6, 7). Эффект усиливается тем, что коэффициент преломления зависит от длины волны света. Поэтому условия полного внутреннего отражения для лучей разного цвета различны. В зависимости от угла наблюдения бриллиант меняет не только яркость, но и окраску луча. Недаром один из них назван «Кохинур», что означает «гора света». Определение лучшего способа огранки алмаза — серьезная задача. Первый вариант огранки был найден еще в 1454 году, а попытки улучшить ее делаются и поныне. Но носят бриллианты да и видят их не так уж много людей. Гораздо популярнее технический алмаз. В инструментах (на что идет 80% добываемых алмазов) он применяется в виде алмазной пыли или полировочных паст. И если при этом говорят о блеске, то имеют в виду блеск обработанных поверхностей, не требующих добавочной шлифовки и полировки.

Блеск золота стал нарицательным понятием. Блестят все металлы. Так даже и говорят: «металлический» блеск. Полностью это свойство проявляется, если поверхность металла гладкая. При нормальном падении лучей слой серебра отражает 85—95% падающего света, слой никеля — 55—65%, стали — 50—55%. Это свойство металлов тесно связано с другой их особенностью — высокой проводимостью. Чтобы разобраться,

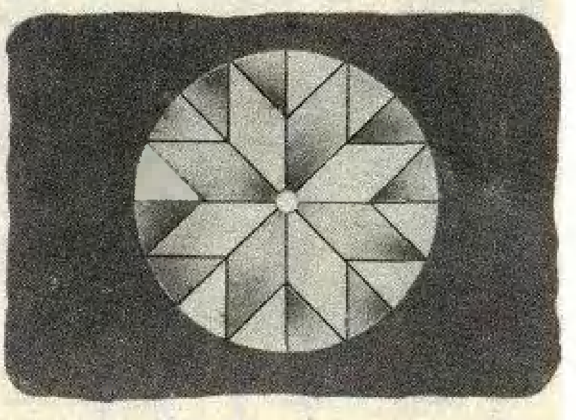


Рис. 6. *а*) Огранка бриллианта; *б*) огранка нижней поверхности бриллианта.

Рис. 7. Ход некоторых лучей в бриллианте.

в чем тут дело, нужно «влезть» внутрь металла. Рассмотрение возникающих явлений потребовало бы отдельной статьи. Укажем только, что особенности металлов объясняются слабой связью части электронов с атомами и образованием благодаря этому легко подвижного «газа» свободных электронов. Поэтому движение электронов в поле электромагнитной волны в металлах совершенно отлично от движения в диэлектриках, где каждый электрон «знает» свой атом. Свободные электроны легко поглощают и излучают обратно бо́льшую часть света, падающего на поверхность металла. Именно поэтому металлы хорошо отражают радиоволны и даже видимый свет. Обычно при этом электромагнитные волны, прошедшие внутрь металла, сильно поглощаются. Интересно, что иногда наблюдается обратная картина: вещества, поглощающие свет на определенном участке спектра, приобретают металлический блеск (например, засохшие фиолетовые чернила).

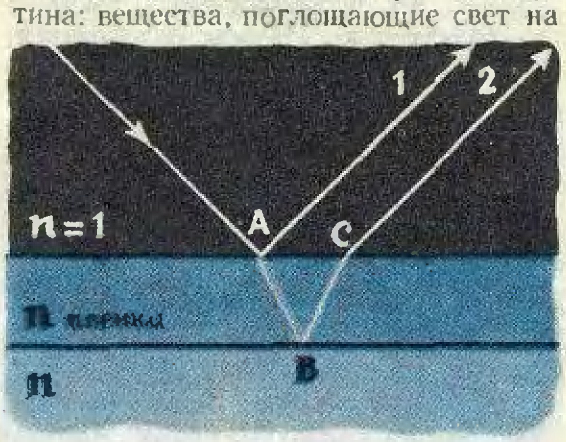


Рис. 8. Разность хода *ABC* между лучами *1* и *2* должна составлять нечетное число полуволн.

Окисленные металлы блестят гораздо хуже, поэтому нужно ожидать, что электрический ток они проводят хуже, чем чистые.

Конечно, блестящие вещи чаще всего красивы, но иногда с блеском приходиться бороться. Если линзы бинокля или фотоаппарата блестят, это означает, что к глазу или фотопластинке приходит меньше света: часть его отражается. Убирают блеск, нанося на поверхность линзы очень тонкую и прозрачную пленку. Толщину ее и коэффициент преломления подбирают так, чтобы лучи, отраженные от двух поверхностей пленки (рис. 8), были сдвинуты по фазе на 180° и, интерферируя, гасили друг друга. Этого нельзя добиться для всей области видимого света, но можно для той длины волны, к которой фотопленка или глаз наиболее чувствительны.

Мы не рассматривали такое интересное явление, как блеск счастья в глазах — но его, видимо, нельзя описать одними физическими законами, да вряд ли к этому и нужно стремиться.

Упражнения

1. Как изменяется яркость Луны для подлетающего к ней космонавта?

2. Отраженная волна исчезает полностью, если интенсивности лучей *1* и *2* (рис. 8) одинаковы. Докажите, что для этого должно быть

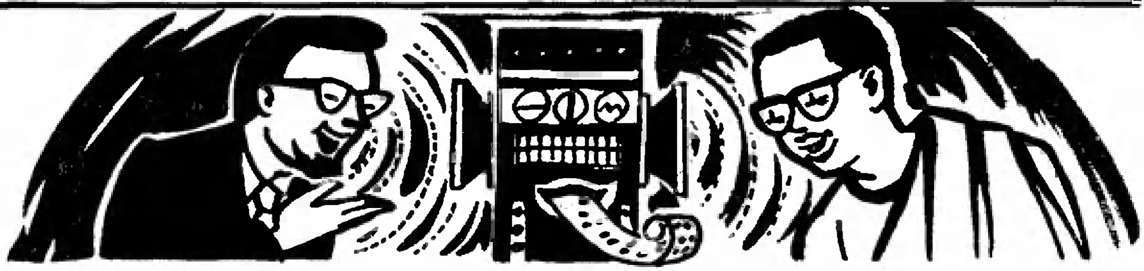
$$n_{\text{пленки}} = \sqrt{n}.$$

3. Отражение света можно уменьшить, если сгладить переход от $n=1$ к $n>1$. Сравните количество отраженного света от границы воздух — стекло и от стекла, на которое налит слой воды (поглощением в воде пренебречь).

4. Можно ли (и как) увеличить количество отраженного света, нанося прозрачную пленку на стекло?

5. На некоторых тканях под определенными углами виден глянец. Дайте объяснение этому эффекту.

МОЖЕТ ЛИ МАШИНА ПЕРЕВОДИТЬ?



В. В. Раскин

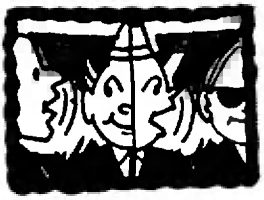
Вавилонская башня и что из-за нее получилось

Начнем с общих мест. Человек живет в обществе. А в обществе надо общаться с себе подобными. Как общаться? А язык-то на что? И вот с незапамятных времен люди только и делают, что говорят. Выходит, все в порядке. Есть потребность общаться — разговаривай. Но вот беда: люди могут разговаривать друг с другом, только если они говорят на одном и том же языке. А языков — великое множество. И если ты говоришь на другом языке, непонятном окружающим, тебя прозовут «немцем», от слова «немой», как будто ты вобще не умеешь говорить.

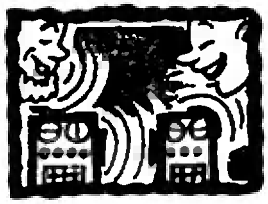
Почему так вышло? Откуда это множество языков? Попытки объяснения содержатся в самых древних мифах. По библейской легенде бог лишил людей взаимопонимания (он-то знал, как важно оно для совместной деятельности!) и заставил их говорить на разных языках, чтобы они не смогли достроить Вавилонскую башню — башню до небес, символ человеческой гордыни. Но эта легенда явно не принимала и не могла еще принять в расчет достижений сравнительного языкознания. Примерно полтора века назад было доказано, что многие языки родственны друг другу и происходят из общего источника.

Разноязычие — результат естественного процесса. Но от этого не легче. Потребность поговорить с иноплеменниками возникла давно. И для улаживания пограничных конфликтов, и для торговли, и в процессе войны необходим был человек действительно древнейшей профессии — толмач, переводчик.

Перевод с одного языка на другой обходится человечеству очень до-



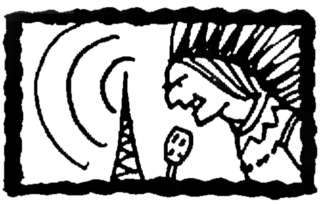
рого. Ведь подумайте: если бы на свете было только 100 языков, то для перевода с каждого языка на любой другой (и наоборот) понадобилось бы $100 \times 99/2 = 4950$ переводчиков. Но языков гораздо больше, да и не для каждой пары языков можно обойтись одним переводчиком. Неудивительно, что с появлением мощной электронной вычислительной техники забрезжила надежда переложить бремя перевода на машину.



Начало этой странной истории

Идея автоматического (машинного) перевода овладела массами (речь идет, конечно, о массах ученых) в послевоенный период, на заре кибернетики, в первые годы электронной эры.

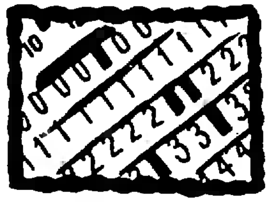
1946 год. Между американскими учеными У. Уивером и А. Д. Бутом происходит дискуссия о границах применения автоматических цифровых вычислительных машин. Первый считает, что основные «элементы языка» можно обнаружить при помощи дешифровочных устройств, разработанных во время войны для раскрытия секретных кодов противника, и на базе этих «элементов» построить машинный перевод. Другой осторожнее: он говорит о принципиальной возможности лишь пословного перевода, да и то при очень небольшом словаре — объем машинной памяти был еще очень невелик. (В следующем году Бут со своим коллегой Бриттеном разработал программу такого перевода.) Но Уивер полон оптимизма. Он затевает переписку с «отцом кибернетики» Норбертом Винером. Винер отнесся к идее Уивера с осторожностью и указал на большие трудности, которые встают на пути исследователя. Уивер не унывает. Его кредо: «Предложение на одном языке — это просто зашифрованная фраза другого языка». Надо научить машину расшифровывать. Однако Уивер не обратил внимания на одно крайне важное обстоятельство: при помощи формальных дешифровочных операций, легко осуществимых в машине, удается дойти лишь до первоначального текста на языке оригинала. Но понять текст на этом языке машина не может: ведь для этого язык надо знать. В годы первой мировой войны дешифровщики долго бились над разгадкой одного секретного кода, но дело не двигалось с места, пока кто-то не догадался, что зашифрован текст на японском языке. Сам-то шифр был обнаружен сразу, но узнать смысл сообщения удалось только после того, как стало известно, на каком языке оно написано, и только при помощи знания этого языка.



В годы второй мировой войны немецкие дешифровщики, лихо расшифровывавшие все наисекретнейшие коды американских радистов, сломали себе зубы об один такой код, который оказался просто-напросто открытым текстом на неизвестном им индейском языке. Таким образом в распоряжении ученых не было пока никаких сведений о том, что естественный человеческий язык поддается «расшифровке».

Ниже приводится задача, в которой сообщается, на каких языках написаны зашифрованные тексты, и произвести дешифровку в этом случае оказывается совсем несложно.

З а д а ч а 1. (Три варианта: англо-русский, немецко-русский и французско-русский.)



Слева записаны в зашифрованном виде слова иностранного языка, справа (напротив) — их перевод (иногда для одного слова несколько переводов, но не обязательно все) на русский язык. Латинские буквы закодированы (взаимнооднозначно) числами, записанными арабскими цифрами, русские — римскими. Буквы одного и того же слова отделены друг от друга запятыми, слова в заданиях — точками с запятой, фразы в заданиях — точками. Надстрочные знаки и апострофы не учитываются, но «и» и «й» считаются разными буквами.

English — Russian

1	— I	8, 4	— X
2, 3, 4, 5, 6, 7	— II, III, IV, V	11, 3, 12	— IV, XI или XII, XI
8, 9, 10	— V или III	9, 3	— XIII, IX, IV
2, 11	— II, VII, VIII или II, VII, I или II, VII, IX	4, 7, 6, 6,	— XIV, IX, XV, IX, XII, V, I
5, 6, 7	— IX, IX	14, 7, 1, 6, 9, 10, 13	— XIV, XV, X, XVI, V, I

Переведите на английский:

I, XII; II, VII, XV, IX, IV, X, IV; VI; IV, III, II.
XII, IX, XV, XIII, VII.
II, IX, XIII, I; XVI, VII, XII, X, IV; IV, VII, II.
XII, VII, IV; II, VII, VIII; XIV, VII, II.

Deutsch — Russisch

1, 2, 3	— I	1, 2, 10	— VII, VIII, IV
4, 5, 6	— II	11, 4, 12	— VIII, IX
2, 7, 8	— III	11, 5, 6, 13, 10	— X, XI, XII, V, VI, XIII
9, 2, 7, 8	— I, IV, XIV, III		

Переведите на немецкий:

VII, VI, XI, IV
I, VI; VII, VIII, VI, XIII
V, VI, XI, VI, X
IV, V, VI; X, VI, VII
VI, VIII; VII, VI, XIII; X, XI, XII, V

Francais — Russe

1, 2	— I	3, 8, 5	— II, III, IV или II, IV, III, I, или I
3, 2	— II, III, IV или II, IV, III, I	10, 11, 6	— III, XIV
4, 5	— V, II, IV, VI	11, 9	— XII, XV, V, III
4, 5, 3, 2, 6	— VII, VI, VIII, V, IX, X	2, 7	— V или XIV
7, 8, 9	— IX, XI, XII, XIII или IX, XI, XII, IV		

Переведите на французский:

XII, XV, V, III; XV, IV, III, X, I; IX, IV, VIII, I; VII, VI, VIII, VII, VI.

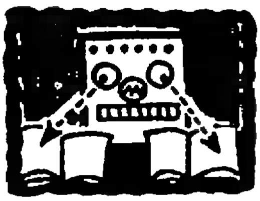
Шли годы. Росло число исследователей по машинному переводу, увеличивалось количество работ.

В 1954—1956 годах произошли весьма важные события. В Америке был произведен публичный эксперимент по машинному переводу при помощи электронной вычислительной машины. В Советском Союзе были проведены два опыта: в Институте точной механики и вычислительной техники переводили на русский язык английский научно-технический текст, а в Математическом институте им. Стеклова — французский математический текст. Испытания прошли успешно. Так что же, праздновать победу? Нет. Вскоре выяснилось, что нужно, наоборот, считать раны.

Далеко ли уедешь на машине, или повесть о том, как мгновенный успех может обернуться затяжной неудачей

Что умеет делать машина? Она умеет совершать простые, механические операции: сравнивать содержание двух ячеек своей памяти, складывать, вычитать, перемножать и т. п. И ей безразлично, осуществляет ли она программу перевода или высчитывает траекторию спутника. Но таких операций машина может делать очень много, и, комбинируя их самым различным образом, программист может заставить машину совершать какие-то определенные, целенаправленные операции.

Какие операции должна произвести машина, чтобы перевести текст с одного языка на другой? Во-первых, она должна его «прочесть». Это сделать не так уж сложно. Текст вводится в закодированном виде в ячейки памяти машины, а заглядывать в свою собственную память машина умеет. Затем машина должна опознать слова. Это делается так: каждое слово (от одного пробела до другого) сравнивается со словарем, который должен храниться в памяти машины. Машина должна определить, в какой форме стоит каждое слово (морфологический анализ), чтобы затем понять, в каких отношениях находятся все слова предложения по отношению друг к другу (синтаксический анализ) А что потом? Потом надо переводить. Собственно, человек-переводчик проделывает все описанные операции мгновенно и бессознательно, и сам процесс перевода начинается именно с этого момента. Нужно найти слова в том языке, на который текст



переводится (этот язык называется выходным), эквивалентные словам языка, с которого осуществляется перевод (входной язык). Затем поставить эти слова в соответствующие формы, то есть упорядочить их согласно законам морфологической и синтаксической структуры выходного языка. Здесь уже что ни шаг, то трудности. Придется в них разобраться.

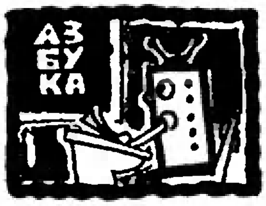
Первые энтузиасты машинного перевода рассчитывали обойтись пословным переводом (ну, может быть, с небольшими исключениями). Возьмем английскую фразу:

I know his daughter.

Дословный перевод этой фразы оказывается правильным:

Я знаю его дочь.

Правда, английский глагол *know* спрягается иначе, чем русский глагол *знать*: в настоящем времени только в третьем лице единственного числа он имеет окончание *-s*, а во всех других лицах имеет общую форму — *know*. Как тогда машине понять, что в русской фразе этому глаголу должна соответствовать форма *знаю*, а не *знаешь* и не *знаете*? Из словарной статьи для *know* этого не выявишь, что бы там ни записать: одну форму *знать* или все возможные формы: *знать*, *знаю*, *знаете*, *знаем*, *знают* и, наконец, *знай*(*те*). Подсказка, однако, содержится в английском слове *I* — *я*, прямо указывающем на первое лицо единственного числа. Значит, нужно вложить в машину правило, согласно которому для перевода глагола *know* (как и других английских глаголов в настоящем времени) правильной формой русского глагола она должна учесть подлежащее, то есть перевод каждого слова по отдельности при помощи только словаря межъязыковых соответствий оказывается недостаточным для правильного перевода. А если бы



в английской фразе был артикль, которого нет в русском языке? Что записать в словарной статье артикля? Да и вообще, что писать в словаре? В русском языке слова могут выступать в разных формах: имена склоняются, глаголы спрягаются. Указывать все возможные формы русского слова при соответствующем английском? Но это раздует словарь, а мы должны экономить машинную память. И потом — главное! — как догадаться, какую из форм употребить? Ведь в английском языке у слов свои формы — какую из них писать в словарь?

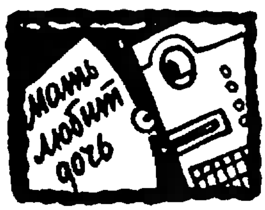
Ответы на эти вопросы удалось найти довольно быстро. Нужно создать отдельные словари основ и окончаний. Тогда, например, латинский глагол *amat* машина будет опознавать так: сперва она разыщет в словаре основ самую длинную из содержащихся там основ, которая вкладывается в это слово,— основы *amat* она не найдет, *ama* — тоже, а вот основа *am* там должна быть, и она соответствует понятию *любить*; это машина запоминает и проводит границу: *am/at*; *at* — это окончание, и его надо искать в словаре окончаний; оно соответствует третьему лицу единственного числа. Значит, переводим так: основа *люб*, окончание *ит* — *любит*. Правильно! Но нам повезло: латинские окончания более или менее соответствуют русским. Однако и с латинскими окончаниями не всегда гладко. Есть в латыни самое короткое на свете предложение, оно состоит из одной буквы. Это *I* — *Иди*! Кроме того, *i* может обозначать еще 8 различных окончаний. Как догадаться, какое из них употреблено в тексте? Снова нужно обращаться к контексту. Причем разгадка может таиться не в соседнем слове, а через слово, через два. Как узнать, в каком? А лингвист должен все предусмотреть и вооружить машину правилом на любой случай.

Еще более твердым орешком оказывается синтаксис. Вы сами можете в этом убедиться.

Задача 2. Установите грамматические связи между словами во фразе: *Раскапывайте погребенных в земле слепых исполинов. (Задача принадлежит А. Е. Кибрику.)*

(Хорошим считается решение, где будет предложено не менее 9 способов — а всего их около 20).

Эта фраза подобрана специально. Но в языке много таких фраз, в которых синтаксический анализ можно сделать не единственным способом. А от этого меняется и смысл предложения. Возьмем фразу: «Мать любит дочь». Кто же кого любит (иными словами, что здесь подлежащее и что дополнение)? Когда такая фраза попадет в машину, то, даже если машина правильно установит формы всех слов, она окажется в большом затруднении: чтобы верно определить синтаксическую структуру, нужно выйти за пределы этого предложения, обратиться к более широкому контексту, понять, о чем идет речь. Как быть?



Может быть, робко предложит запуганный читатель, записывать в словаре и переводить не отдельные слова, а целые словосочетания? Ведь все время приходится обращаться к контексту. А если переводить целыми словосочетаниями, может, будет легче? Пожалуйста! Давайте попробуем. Пусть в языке имеется 1000 слов (а сколько их на самом деле?!). В словосочетании «что бы то ни было» пять слов. Давайте записывать в словарь все пятисловные словосочетания (без повторений слов). Теоретически возможное их число равно $N = 1000 \times 999 \times 998 \times 997 \times 996 \approx 10^{15}$.

Конечно, осмысленных словосочетаний много меньше, но все равно их число превысит объем памяти самой памятливой из всех ныне действующих машин. Кроме того, машина будет долго искать каждое словосочетание в таком словаре.

Долгие годы лингвисты искали выход из этого трудного положения. Придумывали новые очень хитрые алгоритмы, остроумные модели языка, изобретательные методы его описания. Соображали, как упростить процедуру обработки, как улучшить качество перевода. Встречались, обсуждали, спорили. Но позвольте, спохватится читатель, если дело оказывается таким сложным, то почему же так удачно прошли первые опыты?

Секрет прост. Эти опыты проводили на очень небольшом материале. И понятно, что для небольшого и вполне определенного текста легко предусмотреть все исключения и варианты, запастись необходимыми правилами на все случаи, которые имеются в этом тексте. И текст переводится. Вы сможете убедиться в этом сами на примере следующей задачи.

Задача 3. Последовательности арабских цифр при помощи системы правил переводятся в последовательности римских цифр. На каждом шагу применяется одно правило, заменяющее одну арабскую цифру на одну римскую цифру. Используются правила следующих четырех видов:

бесконтекстные:
например, 2→III заменить 2 на III;

одноконтекстные одинарные:
а) 2 (3)→III заменить 2 на III,
б) (3) 2→III если после (перед) 2 стоит 3;

одноконтекстные двойные:
а) 2 (3, 4)→III заменить 2 на III, если
б) (3, 4) 2→III после (перед) 2 стоят 3 и 4);

двуконтекстные:
(3) 2 (4)→III (заменить 2 на III, если перед 2 стоит 3, а после — 4)

К каждой последовательности арабских цифр правила применяются в следующем порядке: сначала все двуконтекстные, затем одноконтекстные двойные, затем одинарные и, наконец, бесконтекстные. Любую совокупность правил этих видов назовем программой. В программе могут быть представлены правила не всех видов.

Пронумеруем арабскими цифрами от 1 до 6 следующие английские (французские, немецкие) слова:

lake, a, this, what, beautiful, is;
champ, un, ce, que, vert, sera;
Feld, das, was, grün, grüne, ist.

Задание 1. Составить список всех предложений, состоящих из данных слов.

Задание 2. Составить минимальный список русских слов, необходимых для перевода предложений из задания 1 на русский язык, и пронумеровать их римскими цифрами.

Задание 3. Составить программу перевода цифровых последовательностей таким образом, чтобы каждая последовательность арабских цифр, соответствующая какому-либо предложению П из задания 1, переводилась в последовательность римских цифр, соответствующую русскому предложению, являющемуся правильным переводом предложения П.

Если эта задача решена правильно, то тем самым осуществлен машинный перевод всех предложений из задания 1 на русский язык: осталось только записать пронумерованные слова в соответствующие ячейки машинной памяти и ввести в машину программу из задания 3. Но ведь этого мало. Нужно придумать такие правила, создать такую программу обработки и так составить словарь, чтобы машина могла перевести любой текст. А вот здесь-то и выплывают все те трудности, об очень небольшой и не самой «трудной» части которых мы успели рассказать.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

Решения задач из «Задачника «Кванта» можно присылать не позднее полутора месяцев после выхода из печати соответствующего номера журнала. Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения нужно написать: фамилию, имя и отчество; шестизначный почтовый индекс, класс и школу, в которой вы учитесь.

М101. В колонию, состоящую из n бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго, или в конце концов погибнет?

Р. М. Ковтун

М102. Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек обладает следующим свойством: для любых двух точек A и B множества найдется точка C множества такая, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

В. Гурари

М103. Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=a, \\ x^2-y^2=b, \end{cases}$$

где a и b — некоторые действительные числа.

Э. А. Ясиновый

М104. Внутри треугольника ABC лежат такие две точки P и Q, что отрезки AP и AQ составляют равные углы с биссектрисой угла A треугольника, а отрезки BP и BQ составляют равные углы с биссектрисой угла B. Докажите, что отрезки CP и CQ составляют равные углы с биссектрисой угла C (рис. 1).

В. Н. Березин

М105. Сумма цифр числа после умножения на 8 может уменьшиться: $75\cdot 8=300$ — сумма цифр была $7+5=12$, а стала 3. Однако она не может уменьшиться более чем в 8 раз.

Докажите, что $\frac{S(8M)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8}$, где M — натуральное число, а $S(A)$ — сумма цифр числа A (в десятичной записи). Для каких еще натуральных чисел k существует такое положительное число c_k, что

$$\frac{S(kN)}{S(N)}\geqslant c_k$$

для всех натуральных N? Найдите наибольшее подходящее значение c_k.

И. Н. Бернштейн

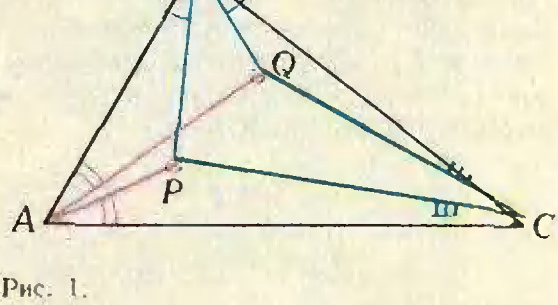


Рис. 1.

Ф113. Сосуд наполовину заполнен водой, в которой плавает кусок льда. Поверх льда наливают керосин, верхний уровень которого устанавливается на высоте h от дна сосуда. Как изменится эта высота, когда лед растает?

Ленинградская городская олимпиада по физике, 1971 г.

Ф114. Два шарика с массами m_1 и m_2 могут колебаться на пружинках

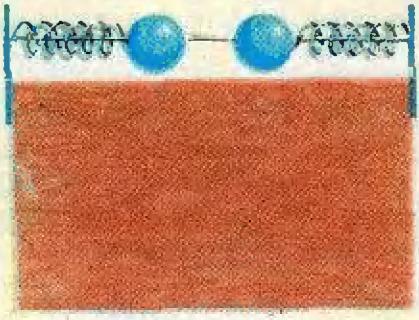


Рис. 2.

одинаковой жесткости вдоль стержня, прикрепленного к бруску с массой M (рис. 2). Брусок лежит на горизонтальной плоскости. В начальный момент шарики притянуты друг к другу с помощью ниточки, сила натяжения которой равна T. Ниточку пережигают. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и плоскостью брусок не сдвинется с места?

Г. Л. Коткин

Ф115. «Черный ящик» — коробка с неизвестной схемой внутри — имеет два вывода. Последовательно с ящиком включают сопротивление $R = 4$ *ом* и затем эту цепь подключают к источнику с э. д. с. $E_1 = 5$ *в* (рис. 3). При этом по цепи идет ток $I_1 = 1$ *а*. Если цепь подключить к источнику с э. д. с. $E_2 = 20$ *в*, то по ней будет идти ток $I_2 = 2$ *а*. Какая схема находится внутри «черного ящика»?

Рис. 3.

Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Я. А. Смородинский

Ф116. Если температура воздуха в цилиндре, показанном на рисунке 4, равна t_0 ($t_0 > 0°$ C), то он остывает до температуры $\frac{t_0}{2}$ примерно за 30 *сек*. Поршень начинают вдвигать и выдвигать с некоторой частотой. В каком случае растает больше льда, окружающего цилиндр, за 50 ходов поршня, если они сделаны а) за 1 *мин*; б) за 1 *ч*; в) за 30 *сутки*?

Г. Л. Коткин

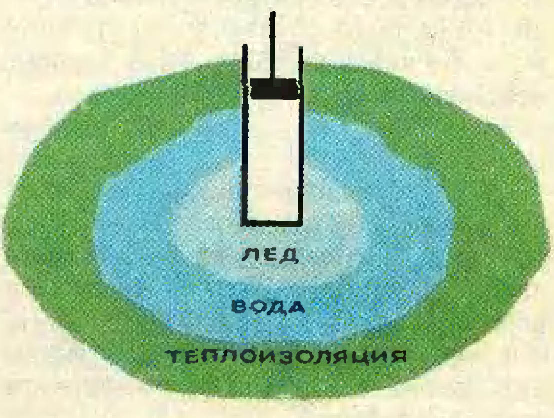


Рис. 4.

Ф117. По обледенелой дороге обычно идут, делая маленькие шаги. С какой шириной шага должен идти человек, не боясь упасть, если длина его ног равна 1 метру, а коэффициент трения подошв обуви о дорогу равен 0,1?

И. Ш. Слободецкий

ПРЕМИИ «Кванта»

Редакция журнала получила более 2000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1972 год.

Вот имена победителей нашего конкурса:

Дмитрий Григорьев — Ленинград, школа-интернат № 45 при ЛГУ;

Юрий Оболонков — Воронеж, школа № 58;

Эдуард Туркевич — Черновцы, школа № 9;

Михаил Прегер — Томск, школа № 51;

Аркадий Черняк — Минск, школа № 50;

Леонид Брагинский — Фрунзе, школа № 61;

Виктор Кривицкий — дер. Клетное Борисовского р-на Минской обл.;

Александр Григорян — Баку, школа № 211;

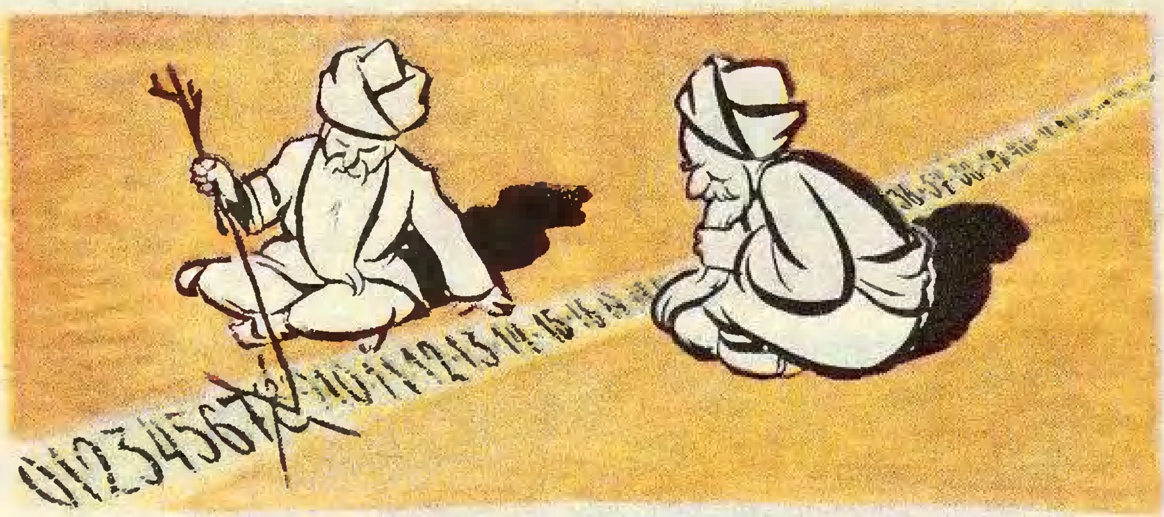
Григорий Зайцев — Гагра, школа № 2;

Иван Гричик — Давид-Городок Брестской обл., школа № 1;

Александр Жуков — Кировск Харцизского р-на Донецкой обл., школа № 11;

Анатолий Анищенко — Сарапул, школа № 13 Удмуртской АССР;

Евгений Губарев — Москва, школа № 144.



РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М61-М63 и Ф72-Ф74.

М61

Два мудреца играют в новую игру, состоящую в следующем. Выписаны числа 0, 1, 2, ..., 1024. Первый мудрец вычеркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычеркивает 256 из оставшихся чисел, затем снова первый вычеркивает еще 128, потом второй — еще 64 числа и т. д. Своим последним пятым ходом второй вычеркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как надо играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

Ответ: При правильной игре разность оставшихся чисел равна 32 (как говорят, «цена игры» равна 32).

На этот ответ наводят следующие соображения: первый игрок стремится к тому, чтобы разность между оставшимися числами была как можно больше, и он должен все время стараться максимально «разредить» остающееся множество чисел, а второму выгодно вычеркивать числа «с краев» (рис. 1). Эти соображения, конечно, не являются строгим доказательством. Многие читатели, руководствуясь не менее правдоподобными, на первый взгляд, соображениями, например, такими: первый должен вычеркивать числа из середины, чтобы оставались числа с большой разностью, получали неверные ответы: 1 или 5, или 6 и разные другие.

Для того чтобы полностью обосновать ответ, в этой задаче (как и при исследовании любой игровой ситуации) нужно доказать два утверждения: 1) как бы ни играл второй, первый может получить не меньше 32; 2) как бы ни играл первый, второй может потерять не больше 32.

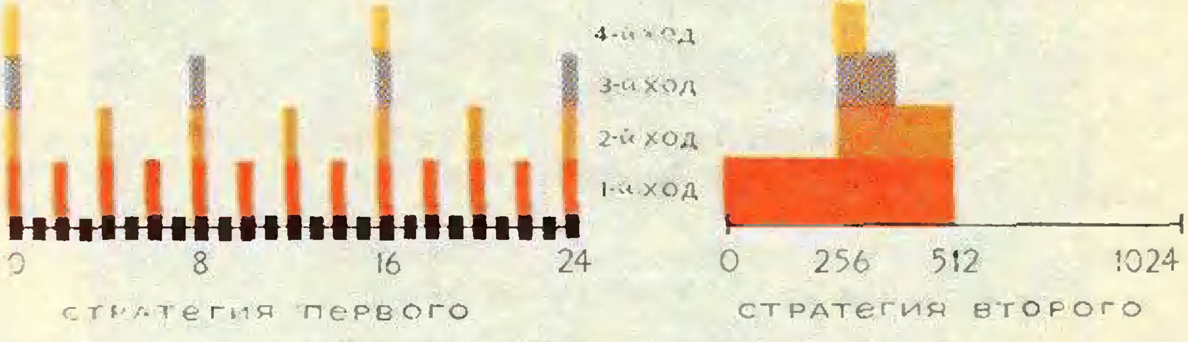


Рис. 1.

Для доказательства утверждения 1) мы укажем такую стратегию первого игрока, которая независимо от ходов второго гарантирует, что разность оставшихся двух чисел будет не меньше 32. Эта стратегия описывается очень просто: при каждом ходе вычеркивать числа через одно, то есть вычеркивать второе, четвертое, шестое,... число из оставшихся (мы считаем, что числа расположены в порядке возрастания). Тогда после 1-го хода разность между любыми соседними из оставшихся чисел будет не меньше 2, после 2-го — не меньше 4, после 3-го — не меньше 8, после 4-го — не меньше 16 и после 5-го — не меньше 32.

Для доказательства утверждения 2) достаточно указать стратегию второго игрока, которая независимо от ходов первого позволит ему проиграть не больше 32. Она состоит в следующем. Первым ходом он вычеркивает все числа, меньшие 512, или все числа, большие 512 (ясно, что или тех, или других осталось не больше 256). После этого разность между крайними из оставшихся чисел будет не больше 512. Аналогично вторым ходом он может добиться того, что все оставшиеся числа будут находиться только в одном из отрезков [0,256]; [256, 512]; [512, 768]; [768, 1024], то есть уменьшить разность между крайними числами по крайней мере до 256. Точно так же 3-м ходом он может уменьшить эту разность до 128, 4-м — до 64 и 5-м — до 32.

Наиболее четкие решения этой задачи прислали *Ю. Оболонков* из Воронежа и *В. Лузгин* из Москвы.

Разумеется, аналогично можно было бы доказать, что если игра состоит из n ходов и начинается с чисел 0, 1, 2,... 2^{2n}, то «цена игры» равна 2^n. Но детальное исследование подобной игры, начинающейся с произвольного множества чисел (не обязательно арифметической прогрессии) представляет собой существенно более трудную задачу.

M62

Докажите, что для любого нечетного числа a найдется такое натуральное b, что 2^b-1 делится на a.

Вот наиболее короткое доказательство.

Рассмотрим числа 2^0-1, $2^1-1, \ldots, 2^a-1$. Этих чисел $(a+1)$. Какие-то два из них дают одинаковые остатки при делении на a, потому что различных таких остатков существует всего a (это рассуждение называется «принцип Дирихле», о его применениях рассказывалось в статье А. Орлова в «Кванте» № 7). Пусть, скажем, числа 2^k-1 и 2^m-1 дают одинаковые остатки при делении на a и $k<m$. Тогда число $(2^m-1)-(2^k-1)=2^k(2^{m-k}-1)$ делится на a и, поскольку a нечетно, $2^{m-k}-1$ делится на a.

Точно так же доказывается и более общий факт: если натуральные числа a и c взаимно просты, то найдется такое натуральное b, что c^b-1 делится на a. Многие читатели заметили, что утверждение задачи вытекает из следующей теоремы Эйлера*): для любых натуральных a и c число $c^{\varphi(a)+1}-c$ делится на a, где $\varphi(a)$ — количество натуральных чисел, меньших a и взаимно простых с ним, и даже приводят формулу для вычисления «функции Эйлера»

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\times$$
$$\times\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdots\left(p_r^{\alpha_r}-p_r^{\alpha_r-1}\right).$$

Правильные решения прислали *А. Черняк* из Минска, *Э. Туркевич*, *Ш. Слепой* из Черновцов, *Г. Левин* из Куйбышева, *Н. Демиденко* из д. Колыбовка Гомельской обл., *А. Пухальский* из Москвы, *Ю. Семенюк* из п. Мирный Краснодарского края и другие читатели.

M63

Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? (Например, такое расположение плиток, как на рисунке 2, не годится, так как здесь есть «шов» AB.)

Предположим, что нам удалось выложить квадрат 6×6 плитками $1\times\times2$ без «швов». Тогда каждая из десяти прямых, разрезающих этот квад-

*) См., например, книгу И. М. Виноградова «Основы теории чисел» ГИТТЛ, М., 1953 или другой учебник по теории чисел.

Рис. 2.

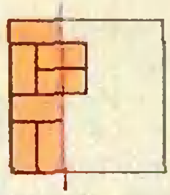


Рис. 3.

Рис. 4.

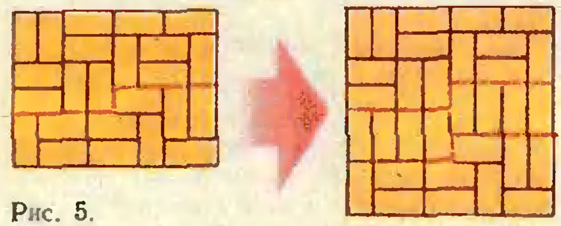


Рис. 5.

рат на клетки 1×1, должна пересекать по крайней мере одну плитку 1×2. Нетрудно доказать, что каждая такая прямая пересекает обязательно четное число плиток. Действительно, она отрезает от квадрата 6×6 прямоугольник $6\times k$, состоящий из четного числа клеток 1×1; этот прямоугольник содержит некоторое количество целых плиток 1×2 и еще некоторое четное количество клеток 1×1 — половинок плиток, пересеченных прямой (рис. 3).

Но если каждая прямая пересекает не менее двух плиток, то общее число плиток должно быть не меньше $2\cdot10=20$, а их всего 18.

Таким образом, мы доказали, что квадрат 6×6 разрезать требуемым образом на плитки нельзя.

Правильное решение этой задачи прислали *А. Костюрин* из Московской области, *И. Кашапов* из Уфы, *В. Шварц* из Ленинграда и другие. В большинстве из присланных писем обсуждается общий вопрос: когда прямоугольник $m\times n$ можно разрезать на плитки 1×2 без швов. Легко доказать, что прямоугольники $2\times n$, $3\times n$ и $4\times n$ разрезать таким образом нельзя. Если же $m\geqslant5$, $n\geqslant5$ и mn четно (последнее условие, разумеется, необходимо), то во всех случаях, кроме рассмотренного выше 6×6, нужное разбиение существует. Для доказательства достаточно придумать разбиение прямоугольников 5×6 и 6×8 и заметить, что из разбиения прямоугольника $m\times n$ легко получить разбиение прямоугольника $(m+2)\times n$ (рис. 4 и 5).

Н. Б. Васильев

Ф72

Почему в марте продолжительность дня меняется быстрее, чем в декабре?

Изменение продолжительности дня связано с углом наклона земной оси к плоскости орбиты движения Земли вокруг Солнца ($\approx23,5^\circ$). Если бы земная ось была перпендикулярна к плоскости орбиты, продолжительность дня практически не менялась бы.

Наклон оси в пространстве не меняется, а так как Земля вращается вокруг Солнца, то она видна с Солнца по-разному (рис. 6) — Солнце различное время освещает участки земной поверхности, и продолжительность дня не постоянна. Очевидно, что в декабре и июне, когда в северном полушарии продолжительность дня соответственно минимальна или максимальна, а северный полюс наклонен от Солнца или к Солнцу, положение земной оси относительно Солнца меняется очень медленно. Медленно меняется и продолжительность дня. В то же время в марте и сентябре положение оси меняется быстрее всего — быстрее всего меняется и продолжительность дня.

Интересно нарисовать примерный график зависимости продолжительности дня от времени года. Грубо — это синусоида (рис. 7). Скорость изменения продолжительности дня, очевидно, пропорциональна тангенсу уг-

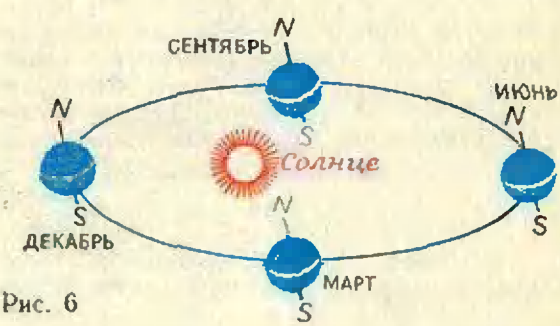


Рис. 6

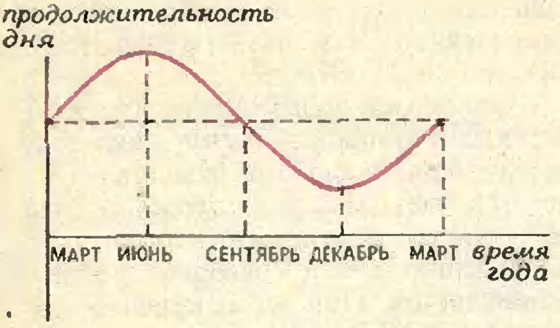


Рис. 7.

ла наклона касательной к графику. В декабре и июне касательная почти горизонтальна (она горизонтальна 22 июня и 22 декабря), а в марте и сентябре ее наклон максимален.

Правильное решение прислали *Ф. Тахватулин* и *З. Таракулов* (Ташкент).

Ф73

Внутрь стеклянной трубки налит раствор сахара. Нижний конец трубки затянут пленкой, проницаемой для воды, но не проницаемой для молекул сахара. Трубку погружают в сосуд с чистой водой до уровня раствора сахара и закрепляют в этом положении. Уровень жидкости в трубке при этом начинает подниматься и через достаточный промежуток времени устанавливается на некоторой высоте над уровнем воды в сосуде (рис. 8).

Чем объясняется это засасывание воды внутрь трубки? Откуда берется энергия для поднятия жидкости?

Если в сосуде, разделенном перегородкой, находятся по разные стороны перегородки два различных (или одинаковых) газа, то как только мы уберем перегородку, газы перемешаются так, что концентрация газовой смеси и давление во всех точках сосуда будут одними и теми же. Причем давление в сосуде будет равно сумме парциальных давлений, то есть давлений, которые были бы в сосуде, если бы весь объем сосуда занимал только один из этих газов (закон Дальтона). Но стоит перегородку сделать проницаемой только для одного из газов, и картина получится другой. Давление по разные стороны перегородки будет различным, причем будут одинаковыми парциальные давления газа, проходящего через перегородку.

Похожее явление есть и в жидкостях. Если два раствора с различной концентрацией растворенного вещества разделены границей, через которую могут проходить как молекулы растворенного вещества, так и молекулы растворителя (например, они разделены пористой перегородкой), то через некоторое время — обычно довольно большое, концентрация раствора благодаря диффузии станет одинаковой. Это вы могли наблюдать, например, заваривая чай в чашке и не помешивая его ложечкой.

Иное дело, если жидкости разделены полупроницаемой перегородкой, через которую свободно проходит растворитель, но не проходят молекулы растворенного вещества. В этом случае растворитель будет переходить в раствор, и уровень жидкости в той части сосуда, в которой находится раствор, будет повышаться, пока не установится некоторая разность уровней между раствором и растворителем. При этом давление по разные стороны перегородки будет различным (рис. 9). В правой части сосуда, в которой находится раствор, давление на перегородку больше на величи-

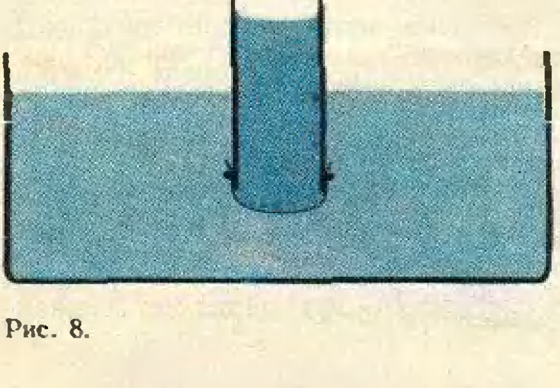


Рис. 8.

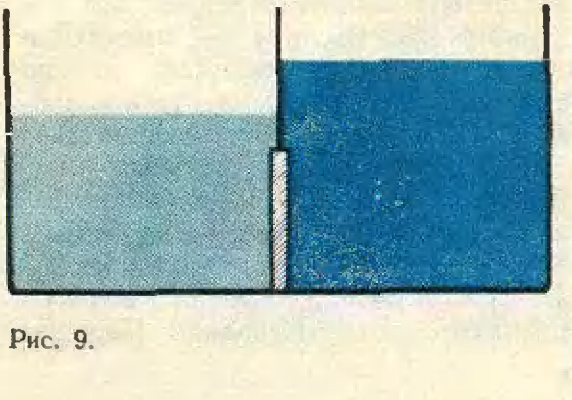


Рис. 9.

ну давления, оказываемого молекулами растворенного вещества. Это давление носит название осмотического давления. Условие равновесия жидкостей в сосудах — это не равенство гидростатических давлений по обе стороны перегородки, а равенство, грубо говоря, давлений молекул растворителя.

Молекулы растворенного вещества ведут себя подобно молекулам газа. Они стремятся занять как можно больший объем, передвинув перегородку (им это удалось бы, если бы перегородка была подвижной). Но так как перегородка закреплена, то смещается не она, а уровень раствора.

Аналогия между поведением молекул газа и молекул растворенного вещества полная. Если раствор слабый, то молекулы растворенного вещества находятся далеко друг от друга и слабо взаимодействуют друг с другом — так же как и молекулы идеального газа (они взаимодействуют друг с другом только сталкиваясь). Поэтому осмотическое давление p должно быть связано с объемом раствора V, температурой T и числом n молей растворенного вещества такой же формулой, как и давление идеального газа:

$$pV=nRT$$

(R — газовая постоянная).

Этот закон был открыт и доказан экспериментально Вант-Гоффом. Осмотическое давление не зависит от природы растворенного вещества и определяется лишь концентрацией раствора. Для сильных растворов (растворов большой концентрации) можно записать уравнение, подобное уравнению Ван-дер-Ваальса для реального газа. Если у нас имеются в растворе разные вещества, то, по аналогии с газами, осмотическое давление равно сумме осмотических парциальных давлений отдельных растворенных веществ. Аналогично с идеальным газом будет вести себя раствор в поле тяжести: именно таким же будет распределение числа молекул по высоте. Это позволило Перрену «взвесить» атом (см. статью М. П. Бронштейна «Как был взвешен атом», «Квант» № 2, 1970 г.).

Энергия на поднятие жидкости берется из тепловой энергии движения частичек растворенного вещества. Точно так же, как и настоящий газ, «газ» частичек растворенного вещества, расширяясь и совершая работу, охлаждается. При этом, конечно, охлаждается весь раствор.

Осмотическое давление играет очень важную роль в жизни человека, животных и растений. Оболочки многих органов представляют собой полупроницаемую перегородку — например, стенки кровеносных сосудов и кишечника, поверхность корней растений и так далее. Именно осмотическое давление обусловливает обмен веществ.

Эту задачу правильно решили многие читатели: *В. Соколов* (пос. Мышанск Гомельской обл., БССР), *С. Арасланова* (пос. Нижнеивкино Куменского р-на Кировской обл.), *Н. Федин* (Омск), *Н. Коленко* (Бондар Одесской обл.), *Н. Егоров* (с. Майя Мечинокангаласского р-на, ЯАССР), *М. Козловский* (Москва), *С. Панфинь* (Новосибирск), *П. Хмара* (Ворошиловград), *А. Фиалков* (Караганда), *Т. Рудакова* (Иркутск), *О. Ким* (Ульяновск), *В. Тапезян* (с. Мщарское Гудаутского р-на, Абхазская АССР), *К. Кириллов* (Минусинск Красноярского края), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл., УССР), *М. Максименко* (Балаклая Харьковской обл.), *А. Верещага* (Орехов Запорожской обл., УССР), *С. Иванов* (Москва).

Ф74

Два конденсатора включены последовательно. Первый имеет емкость C_1 и рассчитан на максимальное напряжение U_1, второй — емкость C_2 и рассчитан на напряжение U_2. К какому напряжению можно подключить эту батарею конденсаторов?

Так как конденсаторы соединены последовательно, то их заряды одинаковы, а емкость батареи равна $C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Если на батарею конденсаторов подано напряжение U, то ее заряд будет равен $q=CU=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U$. Этот заряд не должен превышать максимальный заряд, на который рассчитан каждый из конденсаторов: $q_1=C_1U_1$ и $q_2=C_2U_2$. Поэтому должны выполняться неравенства

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_1U_1$$

и

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_2U_2.$$

Ясно, что заряд конденсаторов не должен превышать меньшего из возможных максимальных зарядов конденсаторов. Пусть для определенности

$$q_1=C_1U_1<q_2=C_2U_2.$$

Тогда

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U\leqslant C_1U_1$$

и

$$U\leqslant\frac{C_1+C_2}{C_2}U_1.$$

Если $C_1U_1=C_2U_2$, то мы получаем естественный результат:

$$U\leqslant\frac{C_2\frac{U_2}{U_1}+C_2}{C_2}U_1=U_1+U_2.$$

Правильное решение этой задачи прислали *В. Чупик* (Торжок Калининской обл.), *Н. Николаева* (с. Белая Глина Краснодарского края), *О. Маслюк* (Новомиргород Кировоградской обл.), *С. Иванов* (Москва), *В. Соколов* (пос. Мышанск Гомельской обл., БССР), *Н. Федин* (Омск), *Н. Коленко* (Бондар Одесской обл.), *Н. Алексеенко* (Кировск Мурманской обл.), *А. Старченко* (пос. Петропавловка Петропавловского р-на Днепропетровской обл.), *М. Козловский* (Москва), *П. Хмара* (Ворошиловград), *Е. Головко* (Ставрополь), *В. Пархоменко* (д. Поколюбичи Гомельской обл.), *Ю. Батыгин* (Москва), *М. Рамазанов* (Махачкала, ДАССР), *Е. Свиридчук* (Ровеньки Ворошиловградской обл.), *Т. Селина* (с. Салтыково Пензенской обл.), *В. Сычев* (Алга Актюбинской обл.), *А. Костюрин* (пос. Красново Московской обл.), *К. Кириллов* (Минусинск Красноярского края).

И. Ш. Слободецкий

ИГРА НА ПЛОСКОСТИ

На плоскости нарисовано несколько точек (вершин). Некоторые из них соединены отрезками. Вася и Петя играют в такую игру: они отмечают поочередно вершины — Вася крестиками, а Петя нуликами. После того как все вершины отмечены, Вася подсчитывает, сколько у него «своих» отрезков, то есть таких отрезков, у которых обе вершины отмечены крестиками, а Петя — сколько отрезков у него. Выигрывает тот, у кого отрезков больше. Исследуйте, как нужно играть в эту игру. Кто может обеспечить себе выигрыш или ничью? Разберите следующие случаи:

а) когда нарисован многоугольник;

б) когда у нарисованной фигуры в каждой вершине сходится ровно k отрезков;

в) когда в разных вершинах сходится разное число отрезков.

Л. Лиманов

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Дано уравнение:

$$mf\left(\frac{a+x}{c+x}\right)+nf\left(\frac{a-x}{c-x}\right)=kx.$$

$$(m\neq n).$$

Определить функцию $f(x)$.

Я. Килимник

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

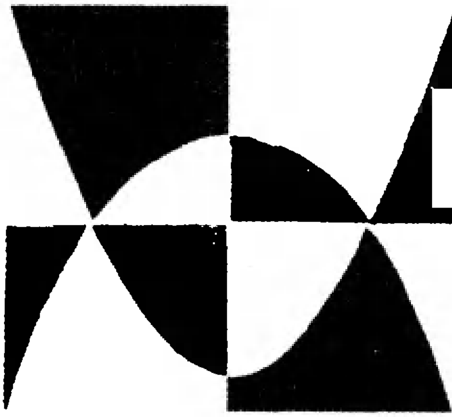
В текущем учебном году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот отдел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы очень благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь некоторые темы, которые имеют принципиальное значение и в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач, и обычно вызывают затруднения у поступающих.

Например, мы предполагаем рассказать о равносильности неравенств, о решении систем нелинейных уравнений, о задачах на комбинации пространственных тел, о графическом методе решения некоторых задач на составление уравнений и т. д. По физике будут опубликованы статьи, касающиеся таких вопросов, как кинематическое уравнение движения, решение задач на равновесие тел, тепловые процессы, законы тока и другие.

Эти статьи будут содержать по возможности подробное изложение теоретического материала, сопровождаться разбором задач, взятых из практики вступительных экзаменов.

Мы предполагаем также в порядке информации помещать образцы вариантов по математике и физике, предлагавшихся в 1971 году на вступительных экзаменах в различных вузах страны. Эти варианты будут снабжены только ответами (или указаниями) — надеемся, что читателям будет интересно самостоятельно попробовать свои силы на решении конкурсных задач.



КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

М. С. Атамукас

Квадратным трехчленом называется многочлен второй степени общего вида

$$ax^2+bx+c, \qquad a\neq 0.$$

На вступительных экзаменах по математике задачи, прямо или косвенно связанные с квадратным трехчленом, предлагаются довольно часто. Да это и не удивительно — в школьной программе уделяется много места и времени изучению квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

выяснению свойств квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c.$$

Эта функция встречается и в физике; например, при описании движения материальной точки, брошенной наклонно к горизонту.

Школьники, конечно, хорошо знают все формулы, относящиеся к квадратному трехчлену, умеют они и изобразить график квадратичной функции — параболу. Однако, когда речь идет о решении конкретной задачи, большинство пытается действовать чисто аналитически, привлекая лишь формулы. Между тем очень часто использование геометрических соображений позволяет получить ответ проще и быстрее.

Мы покажем на нескольких примерах, как важно бывает при решении задач мыслить одновременно и на алгебраическом, и на геометрическом языках.

Для того чтобы проверить, насколько хорошо вы знакомы со свойствами квадратного трехчлена, рассмотрим сперва такую задачу (она предлагалась на устных экзаменах в МГУ).

1. *На рисунке 1 изображено несколько графиков квадратных трехчленов. Рисунок приблизительный, масштаб не указан. Для каждой из этих парабол определить знаки соответствующих коэффициентов a, b и c.*

Возьмем, например, параболу 4; она является графиком некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Так как ветви этой параболы направлены вверх, то коэффициент $a>0$. (Докажите! Многие поступавшие объясняли это так: «В учебнике доказы-

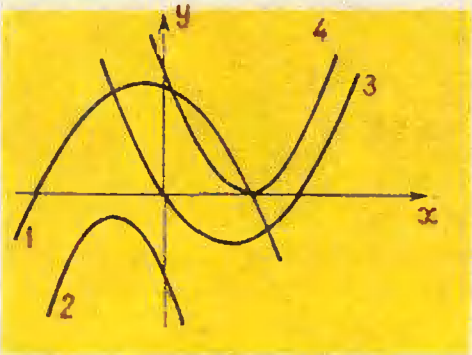


Рис. 1.

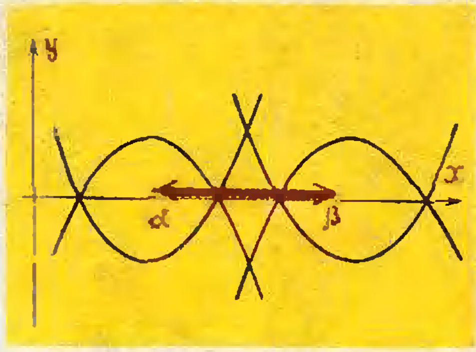


Рис. 2.

вается, что если $a>0$, то парабола направлена вверх». Убедительно ли такое объяснение?). Далее, коэффициент c равен значению функции y в точке $x=0$, то есть $c=f(0)$. Из рисунка видно, что парабола 4 пересекает положительную полуось ординат, а потому $c>0$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{b}{2a}$; из рисунка ясно, что она положительна. Мы уже знаем, что $a>0$, и, следовательно, $b<0$.

Ответ: $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Остальные случаи, представленные на рисунке 1, читатели могут разобрать самостоятельно.

Во многих задачах необходимо выяснить поведение квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ на заданном промежутке (α, β), описать расположение корней этого трехчлена относительно фиксированной точки $x=\gamma$ оси абсцисс и т. д. В этих задачах геометрический язык делает рассуждения простыми и наглядными (и притом вполне строгими!).

2. *На оси абсцисс указан промежуток* $\alpha<x<\beta$. *При каких* a, b *и* c *уравнение*

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0,\quad b^2-4ac>0$$

имеет на этом промежутке только один корень?

Иными словами, надо выяснить, при каких a, b и c график функции $f(x)=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс на промежутке $\alpha<x<\beta$ ровно один раз.

Если пытаться решить этот вопрос аналитически, с помощью формул для корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена, то условия, при которых только один корень лежит между числами α и β, записываются весьма громоздко. Геометрический же подход дает возможность получить это условие сразу и в простом виде.

Представим себе, как может вести себя график трехчлена, удовлетворяющего поставленному в задаче условию; очевидно, возможно одно из четырех положений, представленных на рисунке 2. Заметим, далее, что в каждом из этих случаев значения функции $f(x)$ в точках α и β имеют противоположные знаки, то есть

$$f(\alpha)\,f(\beta)<0,$$

или, более подробно,

$$(a\alpha^2+b\alpha+c)\,(a\beta^2+b\beta+c)<0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение ax^2+ $+bx+c=0$ (при $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$) имело ровно один корень на интервале (α, β).

Итак графики помогли нам найти это условие. Они же подсказывают, как доказать, что это условие необходимое и достаточное.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть уравнение имеет два корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), причем один корень лежит внутри интервала (α, β), а другой — вне его. Тогда одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2), а другое — вне его. Но в школьном учебнике доказывается, что значения функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ вне интервала (x_1, x_2) между корнями и значения функции внутри этого интервала имеют противоположные знаки. Следовательно, $f(\alpha) f(\beta)<0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть числа $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имеют разные знаки. Тогда*) $b^2-4ac>0$, уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2, и значения функции внутри интервала (x_1, x_2) и вне его имеют противоположные знаки. Поэтому только одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2). Но это означает, в свою очередь, что только одно из чисел x_1, x_2 лежит внутри интервала (α, β).

Понятно, что квадратичная функция

$$y=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0,\quad b^2-4ac=0,$$

имеет лишь один корень $x_0 = -\frac{b}{2a}$, и он лежит на промежутке (α, β), если $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$.

Применим изложенные только что соображения для решения следующей задачи, взятой из практики устных экзаменов.

3. *Доказать, что квадратный трехчлен*

$$f(x) = (x-a)(x-b) + \lambda (x-c)(x-d)$$

имеет действительные корни при любом действительном λ, если известно, что ровно одно из чисел c, d лежит между a и b.

Заметим, что

$$f(c)=(c-a)(c-b), \text{ а } f(d)=(d-a)(d-b).$$

Согласно условию, одно из этих значений положительно, а другое — отрицательно. Следовательно, трехчлен имеет два действительных корня, причем один из них лежит на интервале (a, b), а другой вне его.

Рассматривая графики различных квадратных трехчленов, легко заметить одно важное свойство: максимальные и минимальные значения квадратного трехчлена на отрезке $[\alpha, \beta]$ могут достигаться только в трех следующих точках: в точке $x = -\frac{b}{2a}$, если, конечно, она принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$; в точке α; в точке β (в концах отрезка). Докажем это; будем считать, что $a>0$ (случай $a<0$ разбирается аналогично).

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Воспользовавшись такой записью, нетрудно показать, что при $a>0$ функция $f(x)$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ имеет абсолютный минимум, равный $c - \frac{b^2}{4a}$; на интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ монотонно убывает, а на интервале $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ монотонно возрастает.

---

*) Проверьте самостоятельно, что из $f(\alpha) f(\beta) < 0$ следует $b^2 - 4ac > 0$

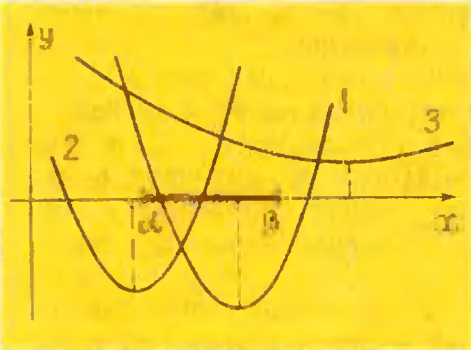


Рис. 3.

Поэтому, если

$$\alpha \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant \beta,$$

то функция $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ принимает наименьшее значение $c-\frac{b^2}{4a}$ в точке $-\frac{b}{2a}$ (см. график *1* на рисунке 3).

Наибольшее значение, в силу монотонности, достигается в одном из концов интервала.

Пусть теперь точка $-\frac{b}{2a}$ находится вне отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. графики *2*, *3* на рисунке 3).

Тогда отрезок $[\alpha, \beta]$ принадлежит одному из интервалов монотонности, и, следовательно, минимальное значение принимается в одном из его концов, а максимальное — в другом.

Попытайтесь теперь сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня на заданном промежутке $\alpha<x<\beta$.

Замеченное свойство квадратного трехчлена облегчит нам решение следующих задач.

4. (МГУ, мехмат, 1970). *При каких значениях параметра* α *неравенство*

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\alpha \sin x \cos x \geqslant 0$$

выполняется для всех x?

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+\alpha \sin x \cos x =$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+\alpha \sin x \cos x =$$

$$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x]+\alpha \sin x \cos x =$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{\alpha}{2}\sin 2x.$$

Обозначим $\sin 2x$ через y; очевидно, $-1\leqslant y\leqslant 1$, коэффициент при y^2 отрицателен, поэтому на отрезке $[-1;1]$ минимум квадратного трехчлена $-\frac{3}{4}y^2+\frac{\alpha}{2}y+1$ достигается в концах отрезка.

Следовательно, неравенство

$$-\frac{3}{4}y^2+\frac{\alpha}{2}y+1\geqslant 0$$

выполняется на всем отрезке $[-1;1]$ в том и только в том случае, когда трехчлен неотрицателен в концах отрезка:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}(-1)^2+\frac{\alpha}{2}(-1)+1\geqslant 0, \\ -\frac{3}{4}\cdot 1^2+\frac{\alpha}{2}\cdot 1+1\geqslant 0 \end{cases}$$

то есть $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ и $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$.

Ответ: данное неравенство выполняется для всех x при $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

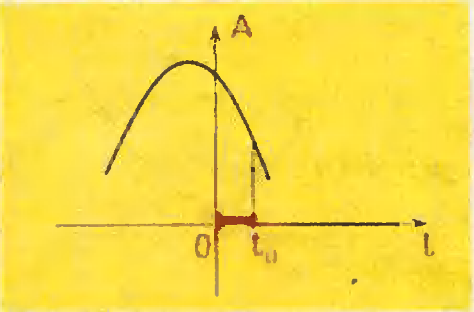


Рис. 4. Минимум при $t = t_0$.

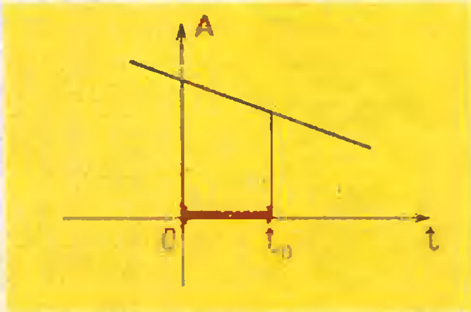


Рис. 5. Минимум при $t = t_0$.

5. (ЛГУ, матмех, 1966). *Ракета должна пройти отрезок, равный H. Она начинает движение с постоянной скоростью v и в любой момент времени может включить дополнительный двигатель, дающий постоянное ускорение a ($a>0$) и работающий до конца пути. Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения, а при включенном дополнительном двигателе — квадрату времени с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно (k_1, $k_2>0$). Какое время ракета должна двигаться с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?*

Пусть τ — время движения ракеты с постоянной скоростью, t — время движения с включенным дополнительным двигателем, A — расход топлива. Из уравнений:

$$H = v\tau + vt + \frac{at^2}{2}, \qquad A = k_1\tau + k_2t^2$$

находим

$$\tau = \frac{1}{v}\left(H - vt - \frac{at^2}{2}\right), \qquad A = \left(k_2 - \frac{ak_1}{2v}\right)t^2 - k_1t + \frac{k_1H}{v}. \qquad (*)$$

Заметим, что $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где t_0 — положительный корень уравнения

$$H = vt + \frac{at^2}{2}, \qquad t_0 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}.$$

(Это время полета в том случае, если двигатель включен с самого начала.) Нужно найти минимум функции $A = A(t)$ (*), заданной на отрезке $[0, t_0]$.

1) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} < 0$. Вершина параболы $A = A(t)$ имеет абсциссу

$$t^* = \frac{k_1}{2\left(k_2 - \frac{ak_1}{2v}\right)} < 0.$$

Парабола расположена так, как указано на рисунке 4. Минимум при $t = t_0$.

2) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} = 0$; $A = -k_1t + \frac{k_1H}{v}$. Минимум при $t = t_0$ (рис. 5).

3) $k_2 - \frac{ak_1}{2v} > 0$. Абсцисса вершины параболы

$$t^* = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} > 0.$$

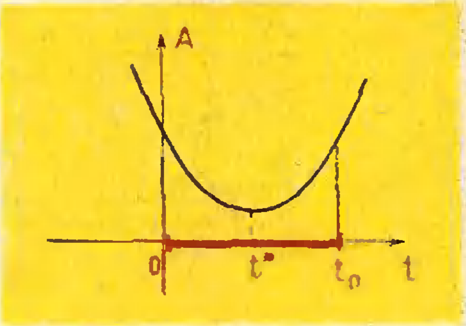


Рис. 6. Минимум при $t = t^*$.

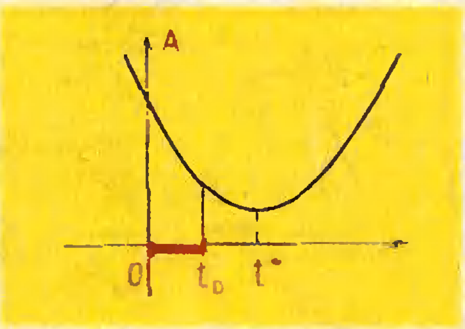


Рис. 7. Минимум при $t = t_0$.

Если $t^* \leqslant t_0$, то минимум при $t = t^*$ (рис. 6).
Если $t^* \geqslant t_0$, то минимум при $t = t_0$ (рис. 7).
Ответ: Если $2vk_2 - ak_1 > 0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} \leqslant \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a},$$

то

$$t = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1}.$$

Если $2vk_2 - ak_1 \leqslant 0$ или $2vk_2 - ak_1 > 0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} > \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a},$$

то

$$t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}.$$

Упражнения

1. Указать условия, при которых оба корня трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ меньше заданного числа α.

2. Указать условия, при которых данное число α лежит между корнями трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1968). Найти все те значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2 - 2bx - 1 = 0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

4. (МГУ, физфак, 1965). Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ действительны и больше a.

5. (МГУ, отделение биологии, 1969). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а его высота равна H. Определить высоту цилиндра, вписанного в этот конус и имеющего наибольшую боковую поверхность.

7. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1969). Указать все корни уравнения $x^2 + 1 = \cos x$.

8. (МГУ, физфак, 1964). Найти все значения m, при которых выражение $x^2 + mx + m^2 + 6m$ будет отрицательно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $1 < x < 2$.

9. (МГУ, физфак, 1963). Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту со скоростью v_0. В самой верхней точке траектории снаряд разрывается на две равные по массе части, причем скорости частей тут же после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Одна половина снаряда упала на расстоянии S от места выстрела. Определить место падения второй половины, если известно, что она упала дальше первой. Считать, что полет снаряда происходит в безвоздушном пространстве.

И. А. Зайцев

Кинематика

Как вы решаете задачи на кинематику? Сколько формул вы помните? 5? 10? 15? Очень часто решение задач начинается с выписывания большого количества формул — формулы для пути, пройденного телом за n-ю секунду, формулы для отношения путей, пройденных телом за последовательные промежутки времени, формулы для разности квадратов скоростей тела и так далее. Затем эти формулы пытаются подставлять друг в друга, делить, множить... Иногда таким способом удается найти ответ. Но чаще всего задачи на кинематику — непреодолимая преграда. Это, пожалуй, один из самых трудных разделов для абитуриентов. Хотя должен быть одним из самых простых. Давайте разберемся в нем.

Будем сначала говорить о прямолинейном движении тела. Если прямую, вдоль которой оно движется, принять за ось координат OX (точка O — начало координат), то положение тела определяется его координатой x. При движении с постоянным ускорением координата тела меняется со временем по закону

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (*)$$

где x_0 — начальная координата тела (при $t=0$), v_0 — его начальная скорость и a — ускорение. Уравнение (*) и есть кинематическое уравнение движения тела. Конечно, уравнение (*) — проекция на ось x векторного уравнения для радиуса-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение центра масс тела (рис. 1). Поэтому проекция на ось OX тех векторных величин, которые направлены так же, как и ось OX, положительны, а тех, которые направлены в противоположную сторону,— отрицательны. Это нужно учитывать, подставляя эти величины в уравнение (*).

Подчеркнем еще раз: уравнение (*) — уравнение для координаты тела, а не для пути, пройденного им. Путь — положительная скалярная величина, которая не может уменьшаться. В то же время, координата тела может вести себя как угодно. Например, если v_0 положительно и $a=-a_0$ отрицательно (вектор скорости $\mathbf{v}_0$ направлен в ту же сторону

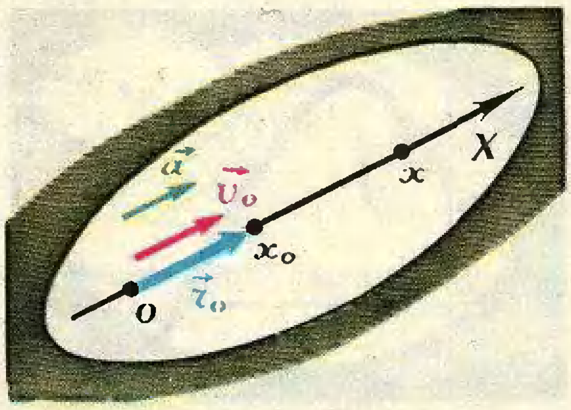


Рис. 1.

что и ось OX, а вектор ускорения $\mathbf{a}$ — в противоположную), то координата тела вначале будет увеличиваться, а затем уменьшаться. Это сразу видно из графика зависимости x от t (рис. 2). Через некоторое время после начала движения координата станет отрицательной. Только в том случае, когда тело движется в одну сторону, путь, пройденный телом, равен абсолютному значению изменения его координаты. Поэтому, если нам нужно найти путь, пройденный телом за какое-то время, приходится разбивать движение на участки, на которых тело двигалось в одну сторону, находить изменения координаты тела на этих участках и складывать их абсолютные величины. Но в этом нет необходимости, если нас интересуют другие величины — координата, время, скорость и ускорение. Нужно просто воспользоваться кинематическим уравнением движения (*).

Решим с его помощью следующую задачу.

З а д а ч а 1. Камень брошен вертикально вверх. Через какое время он упадет на землю?

Выберем ось координат, направленную вертикально вверх, с началом координат, связанным с землей. В этом случае $x_0=0$, $v_0>0$ и $a=-g<0$. Поэтому

$$x=v_0t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

В момент падения на землю $x=0$. Подставляя это значение x в кинематическое уравнение движения камня (1), получим уравнение

$$gt^2-2v_0t=0,$$

решая которое, найдем

$$t_1=0,\ t_2=\frac{2v_0}{g}.$$

Значение $t_1=0$ соответствует моменту бросания камня; t_2 — время движения камня.

Конечно, уравнение движения определяет координату тела в любой момент времени. Воспользовавшись этим, найдем, например, тот момент времени, когда камень находился на высоте h. Подставляя в уравнение движения $x=h$, получим

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gh}}{2h},$$

$$t_2=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2-2gh}}{2h}.$$

На высоте h тело было дважды — в момент t_1 при подъеме и в момент t_2 при спуске (конечно, $2gh\leqslant v_0^2$, так как максимальная высота подъема тела $h_{max}=\frac{v_0^2}{2g}$).

Часто нам нужно знать скорость тела в разные моменты времени. Так как $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$, то для проекции скорости на ось OX имеем

$$v_x=v_0+at. \qquad (**)$$

Это второе кинематическое уравнение движения — уравнение скорости. Оно, конечно, тоже справедливо во все время движения тела, если только ускорение a было постоянным.

Найдем, например, скорость камня в момент падения на землю. В этом случае $a=-g$, $t=t_2=\frac{2v_0}{g}$. Поэтому

$$v(t_2)=v_0-g\frac{2v_0}{g}=-v_0,$$

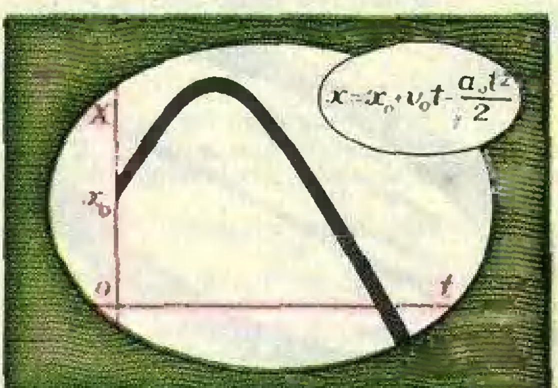


Рис. 2.

то есть в момент падения на землю скорость камня равна начальной, но направлена в противоположную сторону.

Уравнение (**) позволяет легко найти время $t_п$ подъема камня. Так как в точке максимального подъема скорость камня равна нулю, то

$$0 = v_0 - gt_п.$$

Отсюда $t_п = \frac{v_0}{g}$. Время подъема камня равно половине времени полета.

Мы видим, что два уравнения — для координаты и для скорости позволяют получить ответ на любой вопрос относительно движения камня. Именно их и нужно всегда помнить.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло $^1/_3$ своего пути. Сколько секунд (n) и с какой высоты (h) падало тело?

Примем за начало координат точку бросания, а ось координат направим вертикально вниз. Тогда координата тела зависит от времени по закону

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

($v_0 = 0$, $x_0 = 0$, $a = g$). Если тело падало n секунд, время падения равно $n \cdot \tau$ ($\tau = 1$ *сек*), и

$$h = \frac{gn^2\tau^2}{2}. \qquad (1)$$

Через время $(n-1)\tau$ после начала движения координата тела была равна $\frac{2}{3}h$. Поэтому

$$\frac{2}{3}h = \frac{g(n-1)^2\tau^2}{2}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем,

$$n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \approx 5{,}45, \qquad h \approx 145 \text{ м}.$$

Можно было выбрать и другую систему координат, например, связанную с землей и осью координат, направленной вверх. Тогда уравнение движения тела было бы таким:

$$x = h - \frac{gt^2}{2} \quad (x_0 = h, \; v_0 = 0, \; a = -g).$$

Здесь при $t = n\tau$ $x = 0$, а при $t = (n-1)\tau$ $x = \frac{1}{3}h$.

Можно выбрать и еще одну систему координат — с началом в точке бросания и осью, направленной вверх. В этой системе

$$x = -\frac{gt^2}{2};$$

при $t = n\tau$ $x = -h$, при $t = (n-1)\tau$ $x = -\frac{2}{3}h$.

В данной задаче выбор системы координат не очень существен, но часто, удачно выбрав систему координат, можно значительно упростить решение.

Решим, например, такую задачу.

Задача 3. С каким промежутком времени τ оторвались от крыши две дождевые капли, если через время t_0 после начала падения второй капли расстояние между каплями было равно l?

Эту задачу можно, конечно, решать в системе координат, связанной с крышей (сделайте это сами).

Но удобнее перейти к системе координат, связанной со второй каплей. Так как капли падают с одинаковым ускорением относительно земли, то их относительное ускорение равно нулю: капли движутся друг относительно друга равномерно. Их относительная скорость равна скорости первой капли относительно земли в момент отрыва второй капли $v_0 = g\tau$. Уравнение движения первой капли в системе координат, связанной со второй, выглядит так:

$$x = v_0 t + x_0,$$

где $x_0 = \frac{g\tau^2}{2}$. При $t = t_0$ $x = l$, то есть

$$l = g\tau t_0 + \frac{g\tau^2}{2}.$$

Решив это уравнение, получим ответ:

$$\tau = \sqrt{t_0^2 + \frac{l}{g}} - t_0.$$

Решим еще такую задачу.

Задача 4. Снаряд взрывается в некоторой точке траектории. На какой поверхности будут находиться осколки снаряда через некоторое время t после взрыва?

В системе координат, связанной с точкой взрыва снаряда и движущейся с той же скоростью, что и снаряд, и с тем же ускорением относительно земли, осколки снаряда движутся равномерно. Поэтому через время t каждый из них будет находиться на расстоянии v_0t от точки взрыва (v_0 — скорость осколков в нашей системе координат), то есть все они будут находиться на сфере радиуса v_0t с центром в точке взрыва снаряда.

Попробуйте решить эту задачу в системе координат, связанной с землей.

В заключение разберем случай, когда тело движется по криволинейной плоской траектории с постоянным ускорением **a**. В этом случае, спроектировав скорость $\mathbf{v}_0$ и ускорение **a** тела на два взаимно перпендикулярных направления — на оси OX и OY, получим два однотипных уравнения движения:

$$x = x_0 + v_{OX}t + \frac{a_xt^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{OY}t + \frac{a_yt^2}{2},$$

и два уравнения для скорости v тела:

$$v_x = v_{OX} + a_xt, \quad v_y = v_{OY} + a_yt.$$

(Если траектория движения тела не лежит в одной плоскости, то мы должны записать три уравнения.)

Решим с помощью этих уравнений следующую задачу.

Задача 5. Самолет летит горизонтально на высоте h со скоростью v_0. Летчик должен сбросить бомбу в цель, лежащую впереди самолета. Под каким углом α к горизонту он должен видеть цель в момент сбрасывания бомбы?

Выберем неподвижную относительно земли систему координат с началом координат в точке, в которой находился самолет в момент сбрасывания бомбы (рис. 3). Начальная скорость бомбы равна $\mathbf{v}_0$ и горизонтальна, а ускорение $\mathbf{a}=\mathbf{g}$ направлено вдоль оси y. Поэтому

$$x = v_0t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения бомбы на землю в выбранной нами системе координат $x=S$, а $y=h$ (см. рис. 4), поэтому

$$S = v_0t_0,$$

$$h = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Исключая t_0, получим

$$S = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{S} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Решим еще одну задачу.

Задача 6. Камень бросают горизонтально со скоростью v_0 с горы, уклон которой равен α. На каком

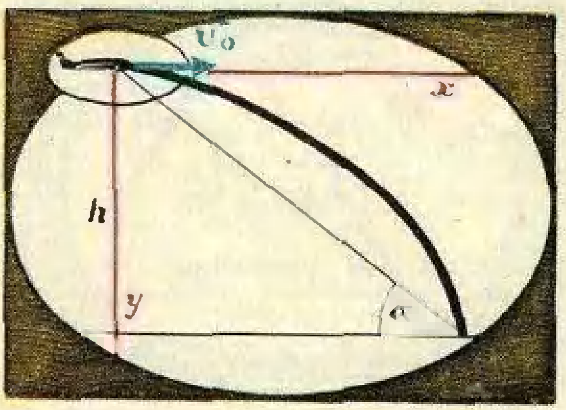


Рис. 3.

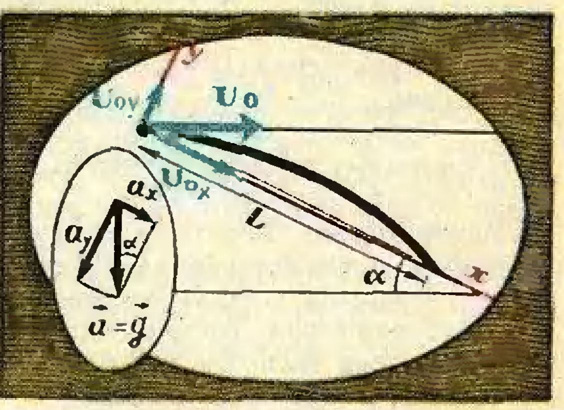


Рис. 4.

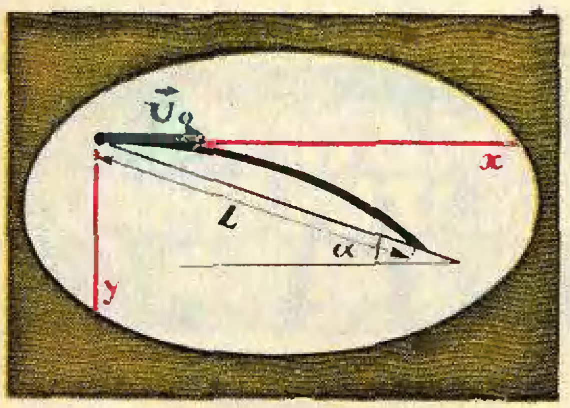


Рис. 5.

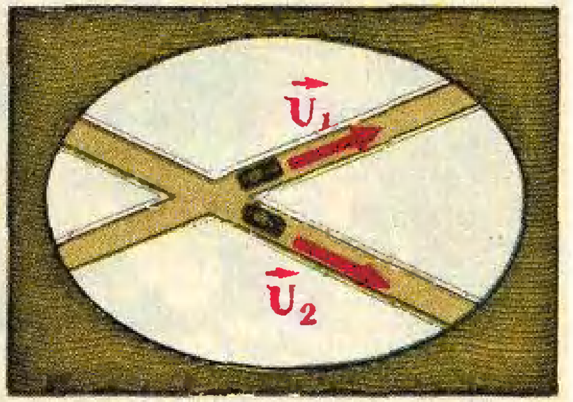


Рис. 6.

расстоянии L от места бросания камень упадет на землю?

В системе координат, показанной на рисунке 4, положение камня в момент времени t определяется координатами

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения на землю $x = L\cos\alpha$, а $y = L\sin\alpha$, то есть

$$L\cos\alpha = v_0 t_0,$$

$$L\sin\alpha = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Можно было бы выбрать и другую систему координат, например, показанную на рисунке 5. Иногда это бывает удобно. В этой системе координат

$$v_{OX} = v_0\cos\alpha, \quad v_{OY} = v_0\sin\alpha,$$

$$a_x = g\sin\alpha \quad \text{и} \quad a_y = -g\cos\alpha.$$

Поэтому

$$x = v_0\cos\alpha t + \frac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2},$$

$$y = v_0\sin\alpha t - \frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}.$$

Подставляя в эти уравнения значения x и y при $t = t_0$ ($x = L$, $y = 0$) и решая их совместно, найдем ответ.

Упражнения

1. Камень свободно падает с высоты h. За какое время он проходит последний метр своего пути?

2. Камень, брошенный вертикально вверх, на высоте h побывал дважды с интервалом времени τ. С какой начальной скоростью он был брошен?

3. Камень бросают вертикально вверх со скоростью v_0 с высоты h от поверхности земли. В этот же момент с земли со скоростью u_0 бросают вертикально другой камень. Через какое время камни окажутся на одной высоте? Какова будет эта высота?

4. Цель, находящаяся на вершине холма, видна под углом α к горизонту с того места, где находится орудие. Как должен быть направлен ствол орудия к горизонту, чтобы попадание было точным, если начальная скорость снаряда v_0, а высота холма равна h?

5. Камень бросают в реку. Какой будет картина волн? Нарисуйте ее.

6. Два автомобиля одновременно прошли перекресток и едут по улицам, составляющим угол α друг с другом (рис. 6). Скорости автомобилей равны v_1 и v_2. Через какое время расстояние между автомобилями будет равно l?

Указание. Удобно выбрать систему координат, связанную с одним из автомобилей. В ней скорость второго автомобиля постоянна и равна

$$\mathbf{v}_{отн} = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1).$$

Е. Я. Гик

Шахматно-математические заметки

Конь Аттилы

Совсем не обязательно быть шахматистом, чтобы знать, какая шахматная фигура самая удивительная. Конечно, это конь. Не случайно выражение «ход конем» стало крылатым и прочно вошло в наш быт. А гроссмейстер-остроумец С. Тартаковер прямо считал, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем». Вот почему, переходя от шахматной доски к фигурам, хочется прежде всего остановиться на задачах, в которых участвует конь.

Несомненно самой трудной и интересной среди них является знаменитая задача, которая так и называется «Ход конем».

Требуется обойти конем все поля шахматной доски, не побывав дважды ни на одном из них.

В свое время эта задача привлекла серьезное внимание таких крупных математиков, как Эйлер, Муавр, Вандермонд, Гамильтон. Первым ее подробно исследовал великий Эйлер и поэтому часто она носит его имя. Сам Эйлер сначала был уверен в том, что задача не решается, и лишь позднее разработал этот вопрос математически.

Однако до сих пор не удалось найти общего метода решения и установить их число. Доказано лишь, что оно превышает 31 миллион и не больше чем C_{168}^{63} (число сочетаний из 168 элементов по 63, состоит из ста цифр).

Еще со времен Эйлера известен так называемый «раздельный ход коня». Он заключается в нахождении маршрута по половине доски, его симметричном дублировании и соединении обоих маршрутов (рис. 1).

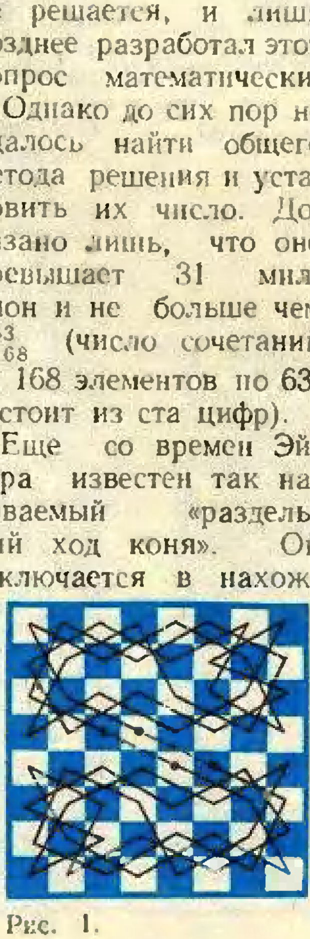


Рис. 1.

Приведенный маршрут замкнут — с конечного поля e4 конь в один ход может вернуться на начальное c5. Из этого следует существование решения для любого начального поля.

Многие составители графиков «хода коня» стремились внести в свое занятие, насколько это возможно, эстетический элемент и достигли довольно любопытных результатов. Вот четыре наиболее достопримечательных примера этого рода (рис. 2а, б, в). Первый изображает крест, второй — букву *N* (Наполеон), график третьего автора напоминает вазу, а последний пример представляет собой внутренний вид цветка, части которого расположены в высшей степени симметрично (рисунок на обложке; здесь, кстати, ход коня не замкнут).

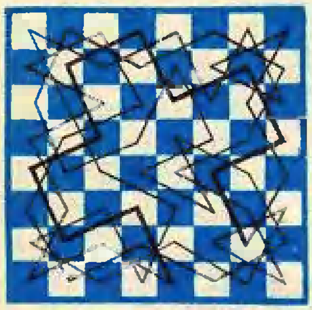


Рис. 2*а*. Крест.

Рис. 2*б*. *N* (Наполеон).

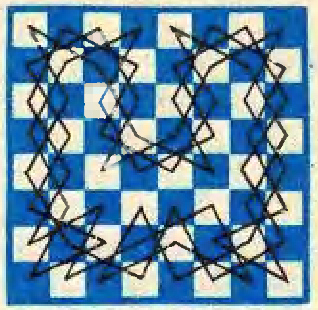


Рис. 2*в*. Ваза.

Как уже говорилось, общего алгоритма для «хода коня» пока не найдено. Однако на практике всегда оправдывается следующее правило, хотя оно и не подтверждено теоретически.

Коня следует всякий раз ставить на поле, из которого он может совершить наименьшее число прыжков на еще не пройденные поля; если таких полей несколько, то разрешается выбирать любое из них.

Применение этого правила на практике настолько эффективно, что с его помощью конем можно обойти всю доску даже в том случае, если несколько начальных ходов сделано произвольно. Например, на рисунке 3 конь уже сделал 40 ходов (числа в клетках соответствуют номерам ходов). В этой довольно трудной ситуации, пользуясь сформулированным правилом, коню удается благополучно закончить путешествие. С поля 40 он мог бы пойти (кроме поля 41) на поля 43, 45, 49 и 59 (рис. 4). Из них поле 43 «связано» с тремя свободными клетками: 42, 44 и 60. По три хода можно сделать и с каждого из полей: 45, 49 и 59. Что же касается поля 41, то с него имеется только два свободных выхода, а именно: на 42 и 48; этим и объясняется выбор поля 41.

При следующем ходе возникает вопрос относительно полей 42 и 48. Из них второе связано с четырьмя свободными клетками, а первое только с одной — 43. С поля 43 у коня выбор между полями 44 и 60, причем каждое из них связано с тремя свободными. Не нарушая правила, можно выбрать любое из них (мы предлагаем поле 44). Продвигаясь далее таким же образом, в конце концов конь попадает на поле 64 (рис. 4.)

Чтобы указать еще одно эффектное решение задачи, сделаем небольшое отступление.

Квадрат размером $n \times n$, *заполненный числами от* 1 *до* n^2, *называется магическим (или волшебным), если суммы чисел, расположенных в каждом из его столбцов и строк, равны между собой.*

Хотя непосредственного практического применения такие квадраты не имеют, они все же являются достаточно интересными математическими объектами, и им посвящено немало книг. Теперь взглянем на еще один «ход коня» (рис. 5), придуманный

	21	34	9		19	32	7
35	10		20	33	8		18
22						6	31
11	36					17	
	23			40		30	5
37	12	25		27			16
24		2	39	14		4	29
1	38	13	26	3	28	15	

Рис. 3.

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

Рис. 4.

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Рис. 5.

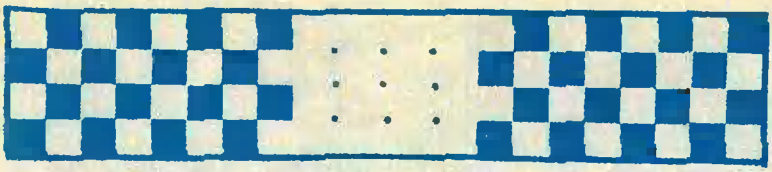


Рис. 6.

около ста лет назад известным русским шахматистом К. Янишем. Легко убедиться, что этот квадрат магический, а все упомянутые суммы равны 260. Приведенный «магический ход коня» может быть отнесен к числу особенно интересных, так как он обладает не только указанным свойством. Само построение его настолько симметрично, что при повороте доски на 180° первая ее половина (поля 1—32) превращается во вторую (поля 33—64). Любопытно, что такой «ход коня» привел Н. Рудина к гипотезе, утверждающей, что шахматы происходят из магических квадратов *).

Особый интерес представляет замкнутый «ход коня». Покажем, что на доске размером $4 \times n$, где n — любое натуральное число (рис. 6), замкнутого маршрута не существует (обычное решение имеется, например, при $n = 3$).

Предположим противное, то есть, что маршрут обхода существует. На крайние поля конь попадает только со средних (мы называем крайними те поля, которые расположены на верхней и нижней горизонталях, а средними — остальные). Если конь обошел все поля, соблюдая условия задачи, то $2n$ ходов были сделаны с крайних полей на средние. Тогда оставшиеся $2n$ ходов он совершил со средних полей на крайние. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит конь, меняется, поэтому все поля крайних горизонталей должны быть окрашены в один цвет, а средних — в другой. Противоречие.

Заканчивая обсуждение задачи о ходе коня, заметим, что она является частным случаем одной важной математической проблемы, заключающейся в нахождении так называемого гамильтонова пути в симметрическом графе **). Этим, видимо, и объясняется ее особая привлекательность для математиков.

Рассмотрим еще одну задачу о коне. *Пусть на шахматной доске находятся белый конь и черный король, причем обусловлен ряд «сгоревших» клеток* (на рисунке 7 они залиты тушью). *Требуется добраться конем до клетки с королем, а затем вернуться на исходную, причем по дороге нельзя становиться ни на «сгоревшие клетки», ни на уже пройденные клетки.*

Эта задача известна под названием «Задача о коне Аттилы». «Трава не растет там, где ступил мой конь!» — похвалялся вождь гуннов, намекая, что предводительствуемые им полчища уничтожают все живое на своем пути. Такого сорта задачи возникают при нахождении пути, ведущего из лабиринта, и подробно решаются в различных книгах по теории графов. В нашем же примере конь Аттилы должен передвигаться следующим образом:

Kg4—f6—e8—g7—e6—f8—g6—e7—c6—a5:b3—d2—b1—a3—b5—d6—f7—h6—g4.

То обстоятельство, что конь на каждом ходу меняет цвет поля, играет немаловажную роль, в чем мы уже имели возможность убедиться. Вот еще один вопрос на эту тему.

Может ли конь, отправляясь с a1, *добраться до* h8, *ступив на каждое поле доски равно один раз?*

Конечно, ответ отрицательный. На каждом нечетном ходу конь попадает на белое поле, так как исходное является черным. Однако число 63 (на этом ходу

*) Подробнее об этой гипотезе можно прочитать в книжке ее автора: Н. Рудин, От магического квадрата к шахматам, М., «Просвещение», 1969.

**) См. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

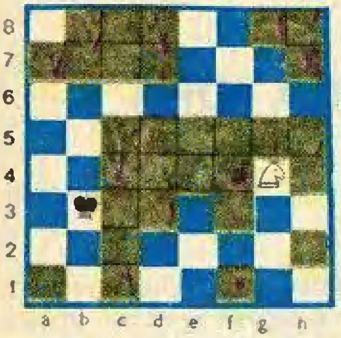


Рис. 7.

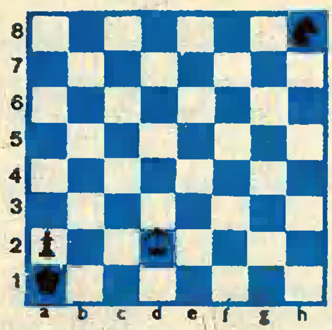


Рис. 8.

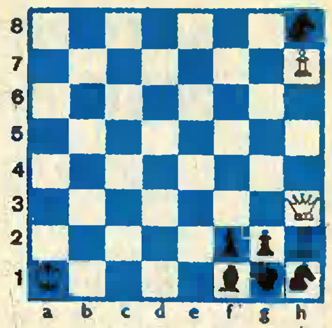


Рис. 9.

конь должен прибыть на h8) — нечетное, а поле h8 — черное. Задача очень проста, но любопытно, что за партией шахматисту иногда приходится решать подобные задачи.

Посмотрите, например, на рисунок 8. В этом окончании ничья достигается только путем **1. Крс1!** Теперь белый король будет переходить с c1 на c2 и обратно, занимая каждый раз поле того же цвета, что и конь. В противном случае (1. Крс2) король легко оттесняется. Черный конь приходит на d3 в тот момент, когда белый король стоит на c2. После этого поле c1 для него недоступно, черный король вырывается из заточения, и пешка проходит в ферзи. Аналогия между этой шахматной задачей и приведенной выше математической очевидна. В заключение рассмотрим еще один, более сложный шахматный пример. На рисунке 9 в основе остроумного этюда (В. Чеховер, 1937 г. Белые начинают и выигрывают) также лежит свойство коня на каждом ходу менять цвет поля.

Путь к выигрышу один: уничтожить королем черного коня h8 и провести пешку в ферзи, так как остальные фигуры белых скованы. Однако белые поля для короля «минированы» — с шахом отойдет слон f1 и затем последует f2—f1Ф. Ничего не дает прямолинейная попытка: 1.Крb2 Kf7 2. Крс3 Kh8 3. Крd4Kf7 (прикрывая поле e5) 4. Крс5 Kh8 5. Крd6 Kg6! (прикрывая поля e5 и e7) или 4. Кре3 Kh8 5. Крf4 Kf7! (прикрывая поля e5 и g5). Надо изменить соответствие цветности для короля и слона. Сначала по черным полям король отправляется на единственное безопасное белое поле — a8, а уже затем прорывается к полю h8.

В следующий раз мы еще встретимся с задачами о коне, а пока предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

1. Имеется шахматная доска размером 3×3. В ее верхних углах стоят два черных коня, а в нижних — два белых (рис. 10). Доказать,

Рис. 10.

что нужно сделать не менее 16 ходов, чтобы поменять местами белых коней с черными.

2. Доказать, что шахматную доску размером $(4k+1)\times\times(4k+1)$ можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белого и черного коней так, чтобы они не могли бить друг друга? Тот же вопрос для доски $m\times n$.

4. На скольких различных полях бесконечной шахматной доски может очутиться конь, совершив n ходов от данного поля?

5. Обычный ход коня 2×1. Рассмотрим теперь ход коня $m\times n$. Какими должны быть числа m и n, чтобы с данного поля конь мог попасть на любую клетку бесконечной шахматной доски?

ИСТОРИЯ ИЗОБРЕТЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

А. К. Кикоин

Первая половина XVIII века была временем быстрого накопления опытных фактов об электрических явлениях. Именно в это время, например, выяснилось, что существуют два рода электричества.

Однако само явление электризации тел, природа электричества оставались совершенно загадочными. Обычно считалось, что электричество — это особая жидкость, содержащаяся в каждом заряженном теле. А наблюдавшееся уменьшение заряда на телах естественно трактовалось как «испарение» этой электрической жидкости. Столь же естественной была идея попытаться предотвратить такое «испарение», поместив заряженное тело в ... бутылку, выбрав в качестве заряженного тела воду.

Такой именно опыт поставил в 1745 году настоятель одного из соборов в Померании Юрген фон Клейст (по другим сведениям опыт был поставлен с целью получить заряженную воду, якобы полезную для здоровья). Он наполнил водой бутылку, закрыл ее пробкой, а через пробку ввел в воду металлический стержень (попросту гвоздь). Присоединив внешний конец стержня к электрической машине, которая в те времена представляла собой вращающийся стеклянный шар, о который терлась рука экспериментатора, Клейст сообщил воде значительный электрический заряд. И тут случилось непредвиденное. Взяв одной рукой бутылку, он имел неосторожность прикоснуться другой рукой к выступавшему из пробки концу гвоздя, и при этом ощутил в руках и плечах сильнейший удар, вызвавший онемение мышц. Потрясенный случившимся, он сообщил об этом в письме одному из своих друзей.

По случайному совпадению, почти такой же опыт и почти в то же время был поставлен в голландском городе Лейдене профессором университета Мушенброком. Только вместо толстостенной бутылки Мушенброк воспользовался тонкостенной стеклянной банкой. Зарядив воду и взяв банку в одну руку, он тоже прикоснулся другой рукой к металлическому стержню, служившему для подвода заряда к воде. При этом Мушенброк ощутил такой сильный удар в руки, плечи и грудь, что потерял сознание и два дня приходил в себя. Сообщая об этом «приключении» в письме своему французскому корреспонденту, Мушенброк добавляет, что не согласился бы повторить опыт, даже если бы ему было обещано французское королевство!

Сначала наблюдения Клейста и Мушенброка были понятны, как проявления так называемого «живого электричества», поскольку в этих опытах такую важную роль играли руки человека. Но довольно скоро стало ясно, что рука, держащая банку, и заряженная жидкость в ней являются, как мы теперь говорим, обкладками конденсатора и что еще более эффективный прибор получится, если внешнюю и внутреннюю поверхности стенок банки покрыть слоем металла, например, оловянной фольги.

Так появился на свет первый электрический конденсатор, который французский физик Жан Нолле назвал Лейденской банкой — название, не забытое и в наши дни.

Вероятно, отголоском тогдашних наивных представлений об электричестве и о «бутылочном» происхождении конденсатора осталось слово, обозначающее главную характеристику конденсатора — емкость. ■

КАК ВИДЯТ НЕВИДИМОЕ

Люди невероятно быстро привыкают к самым удивительным достижениям науки и техники. Можно ли кого-нибудь сегодня озадачить рассказом о телевизоре, реактивном самолете или искусственном спутнике Земли? Даже луноход — это поразительное творение современной науки и техники — занял в нашем воображении обычное место рядом с электронной вычислительной машиной, атомной электростанцией и механизмом передачи наследственных признаков от поколения к поколению. Мы избалованы обилием новых замечательных возможностей, которые современная научно-техническая революция непрерывно передает в распоряжение человечества. Нас уже почти ничем нельзя удивить. А ведь это, в общем-то, плохо. Ибо без удивления нет интереса, а без интереса нет желания что-то узнать по-настоящему, изучить, исследовать самому.

Но давайте на минуту отрешимся от этого «всезнайства» и задумаемся над таким вопросом. Атомы состоят из электронов и атомных ядер. Атомные ядра образованы из протонов и нейтронов. Каковы размеры этих частиц? Радиус протона или нейтрона порядка 10^{-13} *см*. Следовательно, любая из этих частиц, грубо говоря, заключена в объеме порядка 10^{-38}—10^{-39} *см*^{3}. Точка, которая стоит в конце предыдущей фразы, имеет радиус, примерно равный четверти миллиметра. Шар с таким радиусом будет иметь объем порядка 10^{-4} *см*^{3}. Следовательно, в нем можно было бы разместить 10^{35} элементарных частиц! Как же должны быть малы эти частицы, чтобы уместиться в таком гигантском количестве внутри нашей точки. Ни глаз, ни микроскоп, даже с самым сильным увеличением, не может их заметить. Но все вы видели в учебниках и популярных книжках отчетливые фотографии следов таких частиц. Они были получены при помощи знаменитой камеры Вильсона. Вглядитесь в них внимательно, и перед вами откроется новый мир. Вот, например, фотографии следов, оставленных электронами. Одни следы длинные, они проходят через всю камеру, слегка изгибаясь в пронизывающем ее магнитном поле. У этих электронов большая энергия. Другие следы — короткие, сильно искривленные — оставившие их электроны имели небольшой запас энергии. Некоторые следы как бы расщепляются у конца — произошло столкновение с атомом, закончившееся удалением одного из электронов с его оболочки.

Помните, как обнаружили человека-невидимку, героя одноименного романа Герберта Уэллса? Преследователи увидели следы босых ног, прямо на глазах появляющиеся друг за другом на свежем снегу. Человек был невидимым, но следы его оставались. Также и здесь — частицы невидимы, но след их разрушительной работы налицо.

Глядя на фотографию неизвестного нам человека, мы очень мало что можем узнать о нем по существу. Разве что сумеем установить пол и приблизительно оценить возраст. Фотография не расскажет нам, честный он или нет, любит ли он музыку, какова его профессия, есть ли у него дети и если есть, то как он к ним относится.

Иное дело — фотографии следов элементарных частиц в камере Вильсона. Изучая их, мы можем точно определить природу частиц, установить их энергии, заряды, характер взаимодействия друг с другом, взаимные превращения. Эти фотографии — объективные научные документы. Недаром Эрнест Резерфорд следующим образом оценил камеру Вильсона: «Это было замечательное достижение, позволившее увидеть во всех деталях то, что происходит с частицами, когда они пролетают через газ. Каждый, кто обладает хоть каким-то воображением, при виде стереофотографий треков быстрых α-частиц, протонов или электронов не может не восхищаться совершенством, с которым зарегистрированы все подробности их коротких, но полных драматических событий жизней. Камера Вильсона стала бесценным помощником в самых разнообразных исследованиях. Этот прибор является в некотором роде высшим кассационным судом, которому экспериментатор может полностью довериться. Ни один человек, наделенный самым ярким талантом научного предвидения, не смог бы предсказать всех способностей этого прибора, обладающего столь исключительным могуществом и неисчерпаемыми возможностями».

В 1970 году издательство «Атомиздат» выпустило интересную научно-популярную книгу И. М. Беккермана «Невидимое оставляет след» *). В ней содержится подробный рассказ о том, как была создана камера Вильсона и какие удивительные открытия сделаны при помощи этой камеры. Несомненным достоинством книги является то, что И. М. Беккерман знакомит читателей не только с приборами и исследованиями, научными идеями и путями их реализации. Книга рассказывает и об авторе этих идей и приборов, замечательном английском физике Чарльзе Томсоне Рисе Вильсоне. Читая книгу, мы узнаем интересные подробности его жизни, видим, какого огромного труда и напряжения потребовало создание его камеры. Теперь-то все кажется нам удивительно простым. «Конденсация пересыщенного пара на заряженных частицах!» — скажет современный физик. Но в те дни, когда Вильсон начинал свои исследования, еще никто почти ничего толком не мог сказать ни о механизме конденсации паров, ни о природе заряженных частиц. В 1895 году Вильсон начал исследовать условия образования тумана и лишь в 1911 году родилась его «туманная камера».

Книга подробно прослеживает судьбу камеры Вильсона — как советские физики П. Л. Капица и Д. В. Скобельцын поместили ее в магнитное поле (что позволило легко определять знак заряда частиц по характеру искривления их путей), как японский физик Шимизу и английский физик Блэккет автоматизировали ее работу, как ее заставили работать значительно быстрее, изучать миниатюрные молнии — электрические разряды в газах и т. д.

Появление частиц высоких энергий, создаваемых современными ускорителями заряженных частиц, вызвало необходимость в коренной реконструкции камеры Вильсона. Чтобы не позволить частицам выходить из поля зрения камеры, надо было резко повысить плотность вещества на пути частиц. Ученые создают камеры Вильсона с высокими давлениями наполняющего их газа. Но даже при давлении 200 *атм* частицы проходят в камере лишь небольшую долю своего пути. Значит, многие события происходят с ними уже за пределами камеры и никаких следов не остается. Пришлось заменить пересыщенный пар, наполняющий обычные камеры Вильсона, перегретой жидкостью, в которой заряженные частицы образуют на своем пути пузырьки газа. Так же как и капельки тумана, эти пузырьки в закипающей жидкости образуются вокруг заряженных частиц. Первым такую «пузырьковую» камеру создал американский физик Дональд Глезер. Ее иногда называют «антикамерой Вильсона», так как у Вильсона в камере пересыщенный пар конденсируется в капельки жидкости, а у Глезера в перегретой жидкости возникают пузырьки пара.

И опять-таки, рассказывая о рождении пузырьковой камеры, автор подробно прослеживает ход мысли Дональда Глезера, шаг за шагом с логической неизбежностью подводит читателей к конечной цели.

В книге И. М. Беккермана речь идет о сложных современных исследованиях в области физики элементарных частиц. Но автор удачно выбирает материал и вполне доступно излагает самую суть дела, главное в рассматриваемых им исследованиях.

События, описываемые в книге, подходят вплотную к сегодняшнему дню, к проблемам, которые физики намерены решать на самом могучем ускорителе заряженных частиц неподалеку от Москвы, под городом Серпуховым в молодом научном центре Протвино. Там смонтирована огромная жидководородная пузырьковая камера «Мирабель», созданная французскими учеными специально для нашего ускорителя. Диаметр камеры 1,6 *м*, длина 4,5 *м*. Вес ее с необходимыми опорами свыше 200 тонн. Да еще магнит весом в 1150 тонн, внутри которого помещается камера. Какая огромная дистанция отделяет «Мирабель» от первой камеры Вильсона, которая без труда укладывалась внутри небольшого чемодана! А ведь этот путь пройден за срок немногим более полувека.

Вильсон умер на девяностом году от первой и единственной в его жизни тяжелой болезни. До последних дней он упорно работал, проявляя глубокий интерес к изучению новых, неизвестных науке явлений природы.

«Из всех великих ученых нашего века он был, пожалуй, самым мягким и спокойным, самым равнодушным к почестям и славе. Свою беспредельную увлеченность наукой он черпал в исключительной любви к миру природы, в преклонении перед ее красотой». Так оценил выдающийся исследователь космических лучей английский физик Блэккет выдающегося английского физика Чарльза Томсона Риса Вильсона, создателя знаменитой «туманной камеры».

В. А. Лешковцев

*) И. М. Беккерман, Невидимое оставляет след, изд. 2-е, переработанное и дополненное, Атомиздат, 1970.

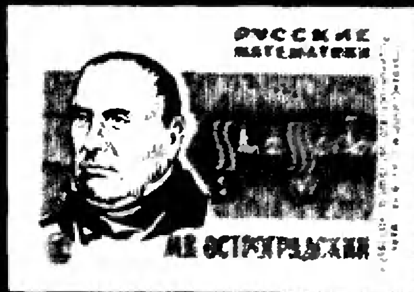
«ЧАСТИЦЫ» И «АНТИЧАСТИЦЫ» В СТАКАНЕ НАРЗАНА

Если налить в стакан какую-нибудь газированную воду, например, нарзан, то можно увидеть, как растворенная в воде углекислота выделяется в виде маленьких пузырьков, быстро всплывающих вверх. Такие пузырьки можно противопоставить каплям жидкости. Капли представляют собой «частицы» вещества. Пузырьки газа в жидкости ведут себя как «античастицы» со свойствами, противоположными свойствам соответствующих частиц. Например, капли под действием силы тяжести падают вниз, пузырьки же поднимаются вверх. Если сосуд, в котором падают капли, вращать, то капли будут отбрасываться к периферии. Во вращающейся жидкости пузырьки стремятся к оси вращения. Если внутри жидкости имеется какое-либо тяжелое тело, то пузырьки-античастицы не притягиваются, а отталкиваются от него. Вместе с тем два пузырька будут взаимно притягиваться.

Поверхность жидкости в рассматриваемых условиях обладает любопытными свойствами. Поднимаясь снизу к этой поверхности, пузырек соприкасается с поверхностным слоем и почти мгновенно исчезает, но не бесследно: из того места, где исчез пузырек, вылетает вверх маленькая капля воды. На поверхности жидкости «античастицы» превращаются в частицы. Эти частицы, как бы продолжая движение поднимающихся пузырьков, взлетают вверх, пока сила тяжести не остановит их и не заставит упасть.

Г. И. Покровский

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА



МАРКА И ЭТИКЕТКА, ПОСВЯЩЕННЫЕ М. В. ОСТРОГРАДСКОМУ

К 150-летию со дня рождения выдающегося русского математика М. В. Остроградского в декабре 1951 года вышла почтовая марка с портретом ученого. Миниатюра выполнена по рисунку известного художника В. Завьялова коричнево-черным цветом на розовой бумаге.

В 1967 году в серии спичечных этикеток с изображениями выдающихся русских математиков и физиков появилась и этикетка, посвященная М. В. Остроградскому. На ней, кроме портрета математика, приведена так называемая «формула Остроградского», которая принадлежит к числу наиболее фундаментальных результатов математического анализа. Эта формула очень часто применяется в математических выкладках, широко используется в физике и механике — при исследовании тепловых, магнитных, электрических и гидромеханических явлений (например, при выводе основного закона гидростатики — закона Архимеда).

Н. Н. Колесников

Во Франции выпустили игру «логические кубики». Набор для игры состоит из 48 плашек («кубиков»). При их изготовлении используются три цвета (красный, синий и зеленый), два размера (большие и такой же формы и цвета маленькие плашки), две толщины (толстые и тонкие) и четыре формы (круг, квадрат, прямоугольник и треугольник). Комбинируя эти четыре признака, можно изготовить как раз $3 \times 2 \times 2 \times 4 = 48$ плашек.

С таким набором можно придумать много игр для любого возраста, начиная от детского сада. У всех игр одно общее: они учат умению рассуждать, то есть логике, знакомят малышей с основными понятиями теории множеств, не запутывая их мудреными объяснениями, и позволяют на практике освоить основные операции над множествами.

Игры для самых маленьких

Самая простая. Уложить кубики на столе в каком-нибудь порядке, дать малышу его запомнить и, после того как он отвернется, переставить что-нибудь. Пусть догадается, что изменилось.

Другая простая. Условие то же, только надо догадаться, какой кубик спрятан или сколько каких спрятано.

Третья. Требуется уложить кубики по придуманному порядку (например, разложить их по цветам).

Четвертая. Попросить малыша перечислить, чем отличаются два каких-либо кубика друг от друга, а чем похожи.

Обмен. Двое зажимают в обе руки по кубику и обмениваются теми, которые у них в правой руке. Выигрывает тот, у кого в кубиках оказалось больше сходства, он забирает себе все четыре кубика. Так разыгрывают все 12 четверок кубиков.

В этих играх вырабатывается понятие признака предмета: малыш усваивает, что кубики отличаются не более чем четырьмя свойствами: либо цветом, либо размерами, либо толщиной, либо формой.

Игры для средних

Домино «одно отличие». Как в домино, игроки выкладывают из кубиков цепь с одним условием: каждый следующий кубик отличается от предыдущего каким-нибудь одним (ровно одним) признаком.

Домино «два отличия». То же, но соседи по цепи должны отличаться двумя признаками (рис.1). Далее можно попробовать играть в «три отличия».

Кладоискатели. Два игрока задумывают по одному кубику («кладу») и пытаются найти клад, спрятанный соперником, указывая поочередно на те или иные кубики. Соперник только сообщает, сколько отличий у них от задуманного. Выигрывает тот, кто быстрее догадается.

Три деревни, два села. Игры, вырабатывающие понятие пересечения множеств. «Два села»: чертят на полу два круга — «села» — и пишут на них названия, например, «красные квадраты» на одном и «маленькие толстые» на другом. В первый круг нужно поместить все красные квадраты, во второй — все маленькие толстые кубики (рис. 2). Надо сообразить, как это сделать. Аналогичная игра «три деревни» еще интереснее.

Названия деревень. Один игрок раскладывает кубики в «три деревни», но не пишет на кругах их названия, а другой должен их отгадать (рис. 3).

Игры для старших

В эти игры можно играть вдвоем, побеждает тот, кому потребуется меньше вопросов для правильного ответа.

Правила отбора. Один из игроков задумывает какое-нибудь правило отбора кубиков, например: «отбирать только желтые», а другой берет наугад кубики и получает ответ «да», когда кубик подпадает под задуманное правило, и «нет» в противном случае. Нужно угадать правило. Правила постепенно усложняют, составляя суммы и пересечения признаков.

Заселение деревень. Один игрок задумывает названия деревень, а другой пытается заселить их кубиками, получая от первого лишь указания «да» или «нет».

Кладоискатели (усложненный вариант). Отгадчик «клада» сразу выкладывает на стол 3—4 «пробных» кубика и получает ответ, сколькими признаками каждый из пробных отличается от задуманного. «Клад» нужно после этого указать с первого раза.

Отгадывание закона. Задумывают правило, по которому можно выкладывать из кубиков цепь. Например, «каждый четный кубик — большой» или «после квадратов — тонкие кружки». Отгадчик начинает строить цепь наугад, кубик за кубиком, получая каждый раз ответ «да», когда он положит их, не нарушив правила, и «нет», когда правило будет нарушено. Надо отгадать закон.

Г. И. Копылов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Беседа о принципе неопределенности»

1. Характерная энергия фермиона есть $\varepsilon \sim \frac{h^2}{2ma^2}$. Если плотность частиц n, то $a \sim n^{-1/3}$ и $\varepsilon \sim \frac{h^2 n^{2/3}}{2m}$. Отсюда энергия единицы объема $E_1 \sim \varepsilon n \sim \frac{h^2 n^{5/3}}{2m}$. Энергия объема V есть $E = E_1 V$. При сжатии на ΔV мы совершаем работу порядка $P\Delta V$ против сил давления. Согласно закону сохранения энергии, $P \sim \Delta E/\Delta V$, где ΔE — изменение энергии при сжатии. Отсюда $P \sim \frac{E}{V} \sim \frac{h^2 n^{5/3}}{2m}$. С точностью до численного множителя (равного $\frac{1}{10}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$) это и есть уравнение состояния фермиевского газа.

Давление его при сжатии растет с ростом плотности быстрее, чем у классического газа (где $p \sim n$). Это следствие принципа Паули, приводящего к эффективному отталкиванию фермиевских частиц.

2. Основная характеристика квантовости — энергия нулевых колебаний $\varepsilon \sim \frac{h^2 n^{2/3}}{2m} = T_0$. Классическая энергия определяется температурой T. При $T \gg T_0$ квантовостью можно пренебречь; при $T \ll T_0$ частицы в основном сосредоточены в наинизших возможных энергетических состояниях — это предельно квантовый случай. Температура T_0 носит название температуры вырождения.

3. При низких температурах определенная доля частиц скапливается в состояниях с ничтожной энергией и потому на полную энергию системы практически не влияет. Количество таких частиц зависит от температуры, так что число бозонов, дающих вклад в энергию системы, не задано, а определяется температурой. Значит, единственная характерная энергия порядка kT. Из условия $\frac{p^2}{2m} \sim kT$ находим $p \sim \sqrt{2mkT}$, а из принципа неопределенности получаем характерное расстояние между «энергичными» частицами: $pa \sim h$, $a \sim \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$. Отсюда плотность частиц

$$n \sim a^{-3} \sim \frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3},$$

энергия частиц в единице объема

$$E_1 \sim \varepsilon n \sim kT\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3},$$

а энергия E объема V есть

$$E = E_1 V \sim kTV\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

Теплоемкость же c_V, то есть изменение энергии при повышении температуры на один градус при постоянном объеме,

$$c_V \sim E/T \sim kV\,\frac{(2mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

4. Характерная температура определяется тем моментом, когда начинается бозе-эйнштейновская конденсация и когда, следовательно, плотность энергичных частиц еще порядка их полной плотности. А это сразу же приводит к тому же критерию, что и в задаче 2.

5. Пусть характерный размер a. Тогда кинетическая энергия в устойчивом состоянии, соответствующем наименьшей энергии, есть $\frac{h^2}{2ma^2} \sim \frac{mv^2}{2}$, так что $v \sim \frac{h}{ma}$. Приравниваем теперь центробежную силу $\frac{mv^2}{a}$ кулоновской силе притяжения $\frac{e^2}{a^2}$. Получим

$$\frac{h^2}{ma^3} \sim \frac{e^2}{a^2}, \qquad a \sim \frac{h^2}{me^2}.$$

Это так называемый боровский радиус.

6. Рассуждение совершенно аналогично проведенному в предыдущей задаче и дает тот же результат.

К статье «Квадратный трехчлен»

1. Должны одновременно выполняться условия: $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $af(\alpha) > 0$, $-\frac{b}{2a} < \alpha$.

2. $af(\alpha) < 0$.

3. Корни действительны при любом b. Остается использовать условия, при которых оба корня трехчлена $f(x) = x^2 - 2bx - 1$ лежат на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$, а именно $f(-2)f(2) \geqslant 0$. Ответ: $|b| \leqslant \frac{3}{4}$.

4. Использовать условия, при которых оба корня трехчлена

$$f(x)=x^2+x+a$$

больше числа a, а именно,

$$1-4a\geq 0,\quad a^2+2a\geq 0, -\frac{1}{2}>a.$$

Ответ: $a<-2$.

5. $a=0$ и $a=2$.

6. $\frac{H}{2}$.

7. Наименьшее значение функции x^2+1 равно 1 и достигается при $x=0$. Поэтому

$$x^2+1>\cos x$$

при всех $x\neq 0$. Значение $x=0$ — корень уравнения.

8. Использовать условия, при которых оба корня квадратного трехчлена

$$f(x)=x^2+mx+m^2+6m$$

лежат вне промежутка $1<x<2$, а именно, $f(1)<0$, $f(2)<0$.

Следовательно, нужно найти значение m, удовлетворяющее одновременно двум неравенствам

$$m^2+7m+1<0,$$
$$m^2+8m+4<0.$$

Решая эти неравенства и отбирая их общие решения, находим ответ:

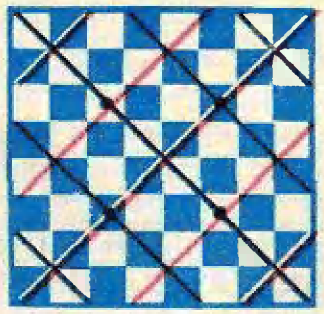
$$\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}<m<-4+2\sqrt{3}.$$

9. $\frac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g}-S$.

К статье «Шахматно-математические заметки» (см. «Квант» № 8)

1. Достаточно заметить, что каждая фигура содержит либо 3 белых поля, либо 3 черных, а всего таких фигур должно быть 25.

2. Легко убедиться, что при любом покрытии каждое тримино содержит ровно одно поле, через которое проходит красная линия и ровно одно, через которое проходит черная линия. Поскольку «красных» и «черных» полей по 22, а тримино — 21, то не покрыто одно «красно-черное» поле из



четырёх, отмеченных на рисунке. Проверьте, что соответствующие покрытия существуют.

3. Напишем на каждом поле доски номер горизонтали, в которой это поле стоит. Проверьте, что каждое тримино покрывает поля с суммой чисел, делящейся на 3, а нам надо покрыть поля с суммой чисел 296, дающей при делении на 3 остаток 2.

4. а) Нет. «Белая» пешка (пешка, стоящая на белом поле) при вторичной расстановке должна стать «черной», а «черная» — «белой». Значит, число «белых» пешек равно числу «черных», что противоречит нечетности доски.

б) Нет. Докажите, что пешки, стоящие на крайней левой вертикали, остались на месте (из a1 в a8 можно пройти по 6 смежным полям). Дальше рассмотрите поля b1 и b8.

К заметке «Еще несколько задач Васи Смекалкина» (см. «Квант» № 8, 3-я страница обложки)

1. Составим таблицу разностей чисел данной последовательности (между соседними числами запишем их разность). В третьей строчке получится последовательность степеней двойки. После этого ясно, как продолжить таблицу.

4		7		12		21		38		71		126		245	...
	3		5		9		17		33		55		119	...	
		2		4		8		16		32		64	...		

2. 312—184=128.

3. Достаточно заметить, что

$$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15 = 6000.$$

4. Получаем 2 л в 5-литровом сосуде, переливаем их в 3-литровый, дополняем 1 л из 5-литрового, в котором остается 4 л.

5. а) Аналогично задаче 1 получаем ответ: 17;

б) Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих. Ответ: тоже 17.

6. Вот один из способов: 4×17 кг+6×16 кг+21 кг=185 кг.

7. 115×98=11 270 или 120×98=11 760.

8. Все книги вместе стоят (42+40+38+36) : 3=52(коп).

10. Первый игрок должен взять 3 карандаша, а после очередного хода соперника брать 4 карандаша минус столько карандашей, сколько взял соперник.

ПОПРАВКИ

В «Кванте» № 1 на стр. 53 в решении задачи 4 уравнения движения должны быть

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 + \frac{M}{m} u^2,$$

$$mv_x = Mu.$$

В «Кванте» № 3 на стр. 9 в правой колонке на 13 строке снизу напечатано «(TiO_2 — рубин)», должно быть «(TiO_2 — рутил)».

В «Кванте» № 4 на стр. 53 в правой колонке на 6 строке сверху напечатано «... $=\alpha$...», должно быть «... $=\beta$...»; на 20 строке сверху напечатано

$$V = \frac{4}{3} R^3 \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{3} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha},$$

должно быть

$$V = \frac{4}{3} R^3 \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha}.$$

Кроме того, формулу для OE следует выводить раньше, чем формулу для SO.

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

1. Неравноплечные чашечные весы уравновешивают, положив на одну из чашек небольшой грузик. Можно ли теперь взвешивать на этих весах обычным способом?

2. Почему вечером человек хуже различает очертания предметов, чем днем?

3. Как определить давление в баллоне электрической лампочки с помощью цилиндрического или прямоугольного сосуда с водой и линейки?

4. Аквалангист хочет измерить глубину озера. Как он может это сделать, имея в своем распоряжении цилиндрический сосуд и линейку?

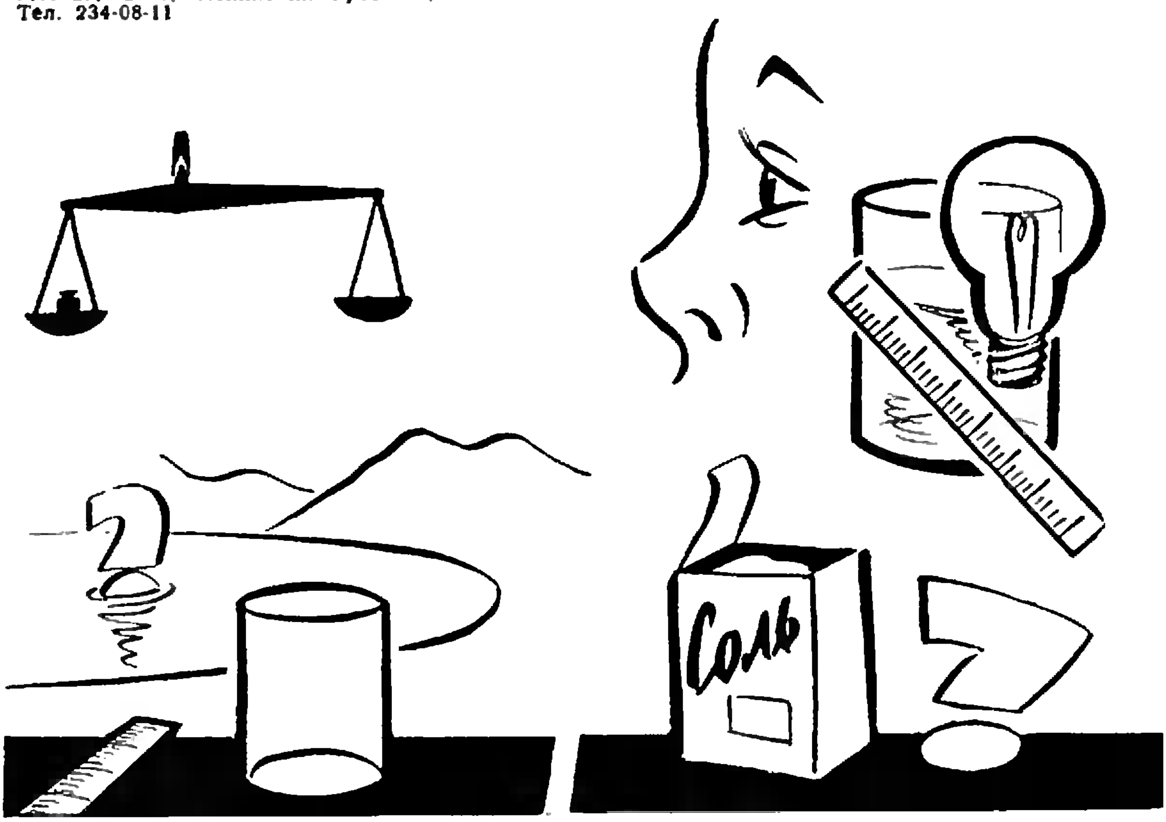
5. Почему кристаллики соли бесцветные, а в массе соль серая или белая?

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор В. П. Сорокина

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 26/V 1971 г.
Подписано в печать 29/VII 1971 г.
Бумага $70\times100^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Усл.-печ. л. 5,2.
Уч.-изд. л. 5,46. Тир. 206135 Т-12363.
Цена 30 коп. Заказ 1060.

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской обл.



ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 9

К нашим читателям!

Объявляется подписка на 1972 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука».

В журнале читатель найдет много задач: задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные задачи, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Цена номера 30 коп. Стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. Наш индекс 70465.